COMPITO di LOGICA MATEMATICA
30 marzo 2010

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Si fornisca una dimostrazione in deduzione naturale dell'equivalenza tra le formule $\neg\exists x.A$ e $\forall x.\neg A$. Si dimostri quindi, utilizzando direttamente la definizione di valutazione, che in ogni struttura $\mathcal{D}$ basata su una algebra di Heyting esse vengono valutate nello stesso modo (sugg.: si dimostri che in ogni algebra di Heyting $\bigvee x_i \wedge b \leq c$ se e solo se $\bigvee(x_i \wedge b) \leq c$ e se ne deduca che $\bigvee x_i \wedge b \leq \bigvee(x_i \wedge b)$)

Soluzione.
Le prove richieste in deduzione naturale intuizionista sono le seguenti

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.A]_2 \qquad \dfrac{[A]_1 \qquad \dfrac{\forall x.\neg A}{\neg A}}{\bot}}{\bot}\;1}{\neg\exists x.A}\;2 \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x.A \qquad \dfrac{[A]_1}{\exists x.A}}{\bot}}{\neg A}\;1}{\forall x.\neg A}$$

Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio notiamo prima di tutto che

$$\begin{array}{rcl} V^\sigma(\neg\exists x.A) & = & \nu \bigvee_{d\in D} V^{\sigma(x/d)}(A) \\ V^\sigma(\forall x.\neg A) & = & \bigwedge_{d\in D} \nu V^{\sigma(x/d)}(A) \end{array}$$

e quindi quel che dobbiamo dimostrare è che, in ogni algebra di Heyting,

$$\nu \bigvee_{i\in I} x_i = \bigwedge_{i\in I} \nu x_i$$

Ora, se $a \leq b$ allora $a \wedge \nu b \leq b \wedge \nu b \leq 0$ e quindi $\nu b \leq \nu a$. Perciò $x_i \leq \bigvee_{i\in I} x_i$ implica $\nu \bigvee_{i\in I} x_i \leq \nu x_i$ e quindi $\nu \bigvee_{i\in I} x_i \leq \bigwedge_{i\in I} \nu x_i$.
Per dimostrare l'altro verso iniziamo dimostrando quel che viene suggerito. Prima di tutto osserviamo che

$$\begin{array}{rll} \bigvee_{i\in I} x_i \wedge b \leq c & \text{sse} & \bigvee_{i\in I} x_i \leq b \to c \\ & \text{sse} & \text{per ogni } i \in I,\ x_i \leq b \to c \\ & \text{sse} & \text{per ogni } i \in I,\ x_i \wedge b \leq c \\ & \text{sse} & \bigvee_{i\in I}(x_i \wedge b) \leq c \end{array}$$

e quindi ponendo $c = \bigvee_{i\in I}(x_i \wedge b)$ deduciamo che $\bigvee_{i\in I} x_i \wedge b \leq \bigvee_{i\in I}(x_i \wedge b)$.
Adesso possiamo concludere visto che, ponendo $b = \bigwedge_{i\in I} \nu x_i$ otteniamo $\bigvee_{i\in I} x_i \wedge \bigwedge_{i\in I} \nu x_i \leq \bigvee_{i\in I}(x_i \wedge \bigwedge_{i\in I} \nu x_i) \leq 0$, perchè $\bigwedge_{i\in I} \nu x_i \leq \nu x_i$ e quindi $x_i \wedge \bigwedge_{i\in I} \nu x_i \leq x_i \wedge \nu x_i = 0$. Quindi $\bigwedge_{i\in I} \nu x_i \leq \nu \bigvee_{i\in I} x_i$.

Esercizio 2
Si determini quali tra le seguenti equivalenze sono valide intuizionisticamente e quali solo classicamente, fornendo una prova in deduzione naturale, e quali non sono valide neppure classicamente, fornendo quando necessario un opportuno controesempio.

1. $((A_1 \wedge A_2) \to (B_1 \vee B_2)) \equiv (A_1 \to B_1) \vee (A_2 \to B_2)$
2. $(\exists x.A(x)) \vee B(x) \equiv \exists x.(A(x) \vee B(x))$

Soluzione.
L'implicazione da destra a sinistra della prima equivalenza ammette la seguente derivazione intuizionista

$$\dfrac{\dfrac{(A_1 \to B_1) \vee (A_2 \to B_2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A_1 \wedge A_2]_2}{A_1} \quad [A_1 \to B_1]_1}{B_1}}{B_1 \vee B_2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A_1 \wedge A_2]_2}{A_2} \quad [A_2 \to B_2]_1}{B_2}}{B_1 \vee B_2}}{B_1 \vee B_2}\,1}{(A_1 \wedge A_2) \to (B_1 \vee B_2)}\,2$$

Tuttavia l'altra implicazione ammette solamente una derivazione classica

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg((A_1 \to B_1) \vee (A_1 \to B_1))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\neg(A_1 \to B_1) \wedge \neg(A_2 \to B_2)}{\neg(A_1 \to B_1)} \\ \vdots \\ A_1\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg((A_1 \to B_1) \vee (A_1 \to B_1))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\neg(A_1 \to B_1) \wedge \neg(A_2 \to B_2)}{\neg(A_2 \to B_2)} \\ \vdots \\ A_2\end{array}}{A_1 \wedge A_2} \quad (A_1 \wedge A_2) \to (B_1 \vee B_2)}{B_1 \vee B_2} \quad \dfrac{[B_1]_1 \quad \begin{array}{c}[\neg((A_1 \to B_1) \vee (A_1 \to B_1))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\neg(A_1 \to B_1) \wedge \neg(A_2 \to B_2)}{\neg(A_1 \to B_1)} \\ \vdots \\ \neg B_1\end{array}}{\bot} \quad \dfrac{[B_1]_1 \quad \begin{array}{c}[\neg((A_1 \to B_1) \vee (A_1 \to B_1))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\neg(A_1 \to B_1) \wedge \neg(A_2 \to B_2)}{\neg(A_2 \to B_2)} \\ \vdots \\ \neg B_2\end{array}}{\bot}}{\bot}\,1}{(A_1 \to B_1) \vee (A_2 \to B_2)}\,c$$

Infatti, se poniamo $A_1 \equiv A$, $A_2 \equiv \neg A$, $B_1 \equiv \bot$ e $B_2 \equiv \bot$ allora dall'implicazione che stiamo considerando otteniamo la seguente implicazione

$$((A \wedge \neg A) \to (\bot \vee \bot)) \equiv (A \to \bot) \vee (\neg A \to \bot)$$

che è logicamente equivalente a

$$(\bot \to \bot) \equiv \neg A \vee \neg\neg A$$

che a sua volta è equivalente a $\neg A \vee \neg\neg A$ che sappiamo non valere intuizionisticamente.

Una prova intuizionista della implicazione da sinistra a destra della seconda equivalenza è la seguente

$$\dfrac{(\exists x.A(x)) \vee B(x) \qquad \dfrac{[\exists x.A(x)]_2 \quad \dfrac{\dfrac{[A(x)]_1}{A(x) \vee B(x)}}{\exists x.(A(x) \vee B(x))}}{\exists x.(A(x) \vee B(x))}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{[B(x)]_2}{A(x) \vee B(x)}}{\exists x.(A(x) \vee B(x))}}{\exists x.(A(x) \vee B(x))}\,2$$

mentre l'altro verso non vale neppure classicamente. Si consideri infatti una struttura classica su un dominio di due elementi $D = \{a, b\}$, una algebra di Boole di due elementi e una valutazione V^σ tale che $\sigma(x) = a$, $V^\sigma(A)(a) = 0$, $V^\sigma(A)(b) = 0$, $V^\sigma(B)(a) = 0$, $V^\sigma(B)(b) = 1$. Allora, $V^\sigma(\exists x.A(x)) = 0$ e $V^\sigma(B(x)) = 0$ e quindi $V^\sigma((\exists x.A(x)) \vee B(x)) = 0$, mentre $V^{\sigma(x/b)}(A(x) \vee B(x)) = 1$ e quindi $V^\sigma(\exists x.(A(x) \vee B(x)) = 1$.

Esercizio 3
Sia $F[X]$ una proposizione costruita con i soli connettivi a partire dallla proposizione X e si assuma che $F[\top]$ e $F[\bot]$ siano entrambe dimostrabili classicamente. Si dimostri che allora anche $F[A]$ è dimostrabile classicamente per una qualsiasi proposizione A.
Se dimostri poi che la stessa proprietà non vale nel caso intuizionista.
(sugg.: si ricordi che nel caso classico l'algebra di Boole di due elementi è sufficiente per dimostrare il teorema di completezza)

Soluzione.
Se $F[\top]$ e $F[\bot]$ siano dimostrabili classicamente allora esse vengono valutate in vero per ogni valutazione in ogni algebra di Boole. In particolare esse saranno valutate in vero da ogni valutazione nell'algebra di Boole di due elementi (in realtà non ci interessa quale sia la valutazione perchè sia $F[\top]$ che $F[\bot]$ non contengono proposizioni da valutare). Ma nell'algebra di Boole di due elementi, qualsiasi sia la proposizione A, per ogni valutazione V avremo che $V(A) = 0 = V(\bot)$ oppure $V(A) = 1 = V(\top)$ e quindi in ogni caso $V(F[A])$ sarà uguale a 1. Ma allora, per il teorema di completezza del calcolo classico rispetto all'algebra di Boole di due elementi (si veda il suggerimento) $F[A]$ deve essere dimostrabile.

La stessa cosa non vale nel caso intuizionista. Infatti se supponiamo $F[X] \equiv X \vee \neg X$ abbiamo che sia $F[\top] \equiv \top \vee \neg \top$ che $F[\bot] \equiv \bot \vee \neg \bot$ sono dimostrabili (vengono interpretati in 1 in ogni algebra di Heyting) mentre $F[A] \equiv A \vee \neg A$ non lo è (si può falsificare nell'algebra di Heyting di tre elementi allineati).