COMPITO di LOGICA MATEMATICA
19 luglio 2010

Nome: Matricola:

Esercizio 1

Dimostrare che non esiste alcuna formula scritta utilizzando solo congiunzioni, disgiunzioni, quantificazioni universali e quantificazioni esistenziali che sia valida in ogni struttura per ogni interpretazione.
(sugg.: si ricordi il teorema di completezza)

Soluzione.

Il teorema di completezza ci assicura che affinchè una formula sia valida in ogni struttura per ogni interpretazione bisogna che essa sia dimostrabile. Consideriamo allora una formula A scritta utilizzando solo congiunzioni, disgiunzioni, quantificazioni universali e quantificazioni esistenziali e chiediamoci come può essere fatta una sua prova allo scopo di convincerci che tale prova non può esistere.
Ora se $A \equiv P(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula atomica essa non è sicuramente dimostrabile.
Supponiamo allora che $A \equiv B \wedge C$; allora una prova di $\vdash A$ deve passare per una prova di $\vdash B$ e una prova di $\vdash C$, ma queste sono due formule più semplici di A e possiamo quindi supporre per ipotesi induttiva che esse, che sono ancora scritte utilizzando solo congiunzioni, disgiunzioni, quantificazioni universali e quantificazioni esistenziali, non siano dimostrabili.
Nello stesso modo non può essere dimostrabile $A \equiv B \vee C$ perchè una prova di $\vdash A$ deve passare per una prova di $\vdash B$ o per una prova di $\vdash C$, ne può essere dimostrabile $A \equiv \forall x.B$ perchè una sua prova deve passare per una prova di $\vdash B$ e non può essere dimostrabile $\vdash \exists x.B$ perchè una sua prova deve passare per una prova di $\vdash B[x := t]$ per qualche termine t.

Esercizio 2
Si dimostrino utilizzando la deduzione naturale intuizionista che

1. $\neg(\gamma \to \delta)$ vale se e solo se valgono $\neg\neg\gamma$ e $\neg\delta$
2. Se $\neg\neg(\gamma \to \delta)$ e γ valgono allora vale anche $\neg\neg\delta$

e se ne deduca che $\neg\neg((\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha))$ vale intuizionisticamente.
Soluzione.
Per quanto riguarda il primo punto abbiamo che

$$\dfrac{\dfrac{\neg(\gamma \to \delta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\gamma]_2 \quad [\gamma]_1}{\bot}}{\delta}}{\gamma \to \delta}\,1}{\bot}}{\neg\neg\gamma}\,2 \qquad \dfrac{\dfrac{\neg(\gamma \to \delta) \quad \dfrac{[\delta]_1}{\gamma \to \delta}}{\bot}}{\neg\delta}\,1 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\gamma \to \delta]_2 \quad [\gamma]_1}{\delta} \qquad \neg\delta}{\bot}}{\neg\gamma}\,1 \qquad \neg\neg\gamma}{\bot}}{\neg(\gamma \to \delta)}\,2$$

Vediamo ora il secondo punto

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg(\gamma \to \delta) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\gamma \quad [\gamma \to \delta]_1}{\delta} \qquad [\neg\delta]_2}{\bot}}{\neg(\gamma \to \delta)}\,1}{\bot}}{\neg\neg\delta}\,2$$

Possiamo allora concludere $\neg\neg((\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha))$ ragionando come segue. Assumiamo che valga $\neg((\neg\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha))$. Allora per il punto (1) possiamo dedurre $\neg\neg(\neg\alpha \to \beta)$ e $\neg((\neg\alpha \to \neg\beta) \to \alpha))$ e quest'ultima, di nuovo per il punto (1) ci permette di dedurre $\neg\neg(\neg\alpha \to \neg\beta)$ e $\neg\alpha$. Ma allora, per il punto (2), da $\neg\neg(\neg\alpha \to \beta)$ e $\neg\alpha$ possiamo dedurre $\neg\neg\beta$ e da $\neg\neg(\neg\alpha \to \neg\beta)$ e $\neg\alpha$ possiamo dedurre $\neg\neg\neg\beta$ che ci portano quindi ad una derivazione di $\bot$.

Esercizio 3
Si consideri la seguente equivalenza

$$\neg\neg\exists x.A \equiv \exists x.\neg\neg A$$

Dimostrare che essa vale classicamente ma non intuizionisticamente.

Soluzione.
Una velocissima dimostrazione classica dell'equivalenza si può ottenere per via semantica visto che in ogni algebra di Boole $\nu\nu x = x$ per ogni elemento x. È tuttavia possibile fornire anche una prova sintattica dell'equivalenza che ha il vantaggio di farci vedere quale delle due implicazioni vale solo classicamente e questa informazione ci sarà utile per trovare il controesempio alla validità intuizionista dell'equivalenza.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x.\neg\neg A \qquad \dfrac{[\neg\neg A]_2 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_1}{\exists x.A} \quad [\neg\exists x.A]_3}{\bot}}{\neg A}\,1}{\bot}}{\bot}\,2}{\neg\neg\exists x.A}\,3
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\exists x.A \quad [\neg\exists x.A]_{c_1}}{\bot}}{\exists x.A}\,c_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg\exists x.\neg\neg A]_{c_2}\\ \vdots\\ \forall x.\neg\neg\neg A\end{matrix}}{\neg\neg\neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{[A]_2 \quad [\neg A]_1}{\bot}}{\neg\neg A}\,1}{\bot}}{\bot}\,2}{\exists x.\neg\neg A}\,c_2$$

Quindi l'implicazione da destra a sinistra vale anche intuizionisticamente e dobbiamo perciò falsificare quella da sinistra a destra. Possiamo farlo facilmente con una interpretazione su una struttura finita su un dominio di due elementi $\{0, 1\}$ e l'algebra di Heyting finita che trovate qui sotto interpretando $V(A)(0) = a$ e $V(A)(1) = b$ visto che la proposizione $\neg\neg(A \vee B) \to (\neg\neg A \vee \neg\neg B)$ non vale intuizionisticamente come mostra il seguente controesempio.

$$\nu\nu(a \vee b)$$

$$a \vee b, \nu\nu a \vee \nu\nu b$$

$$a, \nu\nu a \qquad\qquad\qquad b, \nu\nu b$$

$$\nu(a \vee b)$$

Esercizio 4
Sia B una algebra di Boole.

1. Dimostrare che per ogni $x, y \in B$, $x \leq y$ se e solo se $x \wedge \nu y = 0$.
2. Cosa si può dire della stessa equivalenza nel caso delle algebre di Heyting?
3. Dedurne che in ogni algebra di Boole, se $x \nleq y$ allora c'è un filtro proprio che contiene x e non contiene y.

Soluzione.
Se $x \leq y$ allora $x \wedge \nu y \leq y \wedge \nu y = 0$ e quindi l'implicazione da sinistra a destra nel primo punto dell'esercizio vale in ogni algebra di Heyting e quindi, in particolare, in ogni algebra di Boole.
Per quanto riguarda l'altra implicazione, notiamo prima di tutto che, per ogni a e b elementi di un algebra di Boole, se $a \leq b$ allora $a \wedge \nu b \leq b \wedge \nu b = 0$ e quindi $\nu b \leq \nu a$. Quindi se $x \wedge \nu y = 0$ allora $\nu y \leq \nu x$ per definizione di ν e quindi $x = \nu\nu x \leq \nu\nu y = y$, dove l'ultimo passaggio vale solo in un algebra di Boole.
Infatti, possiamo subito trovare un controesempio intuizionista alla equivalenza considerando l'algebra di Heyting di tre elementi $0 < a < 1$ visto che abbiamo che $1 \wedge \nu a = 1 \wedge 0 = 0$ ma $1 \nleq a$.
Per quanto riguarda l'ultimo punto notiamo che, dal primo punto otteniamo che $x \nleq y$ se e solo se $x \wedge \nu y \neq 0$ e quindi, se consideriamo $\uparrow (x \wedge \nu y) = \{z \in B \mid x \wedge \nu y \leq z\}$ otteniamo un filtro proprio che contiene x visto che $x \wedge \nu y \leq x$ e non contiene y visto che contiene νy perchè $x \wedge \nu y \leq \nu y$ ed è proprio.