COMPITO di LOGICA MATEMATICA
24 marzo 2011

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Si consideri la seguente equivalenza logica e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna delle due implicazioni un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista ed un ticket se vale anche intuizionisticamente

$$\exists y.\forall x.(A(x) \to B(y)) \equiv \forall x.\exists y.(A(x) \to B(y))$$

dove si intende che y non appare libera in $A(x)$ e x non appare libera in $B(y)$.
Suggerimento: si costruiscano le seguenti deduzioni:

$$\begin{array}{ll}
(1) & \forall x.\exists y.(A(x) \to B(y)) \vdash \forall x.(A(x) \to \exists y.B(y)) \\
(2) & \forall x.(A(x) \to \exists y.B(y)) \vdash (\exists x.A(x)) \to (\exists y.B(y)) \\
(3) & (\exists x.A(x)) \to (\exists y.B(y)) \vdash \exists y.(\exists x.A(x)) \to B(y) \\
(4) & \exists y.(\exists x.A(x)) \to B(y) \vdash \exists y.\forall x.(A(x) \to B(y))
\end{array}$$

Soluzione.
L'implicazione da sinistra a destra vale intuizionisticamente visto che si può fornire la seguente dimostrazione:

$$\dfrac{\exists y.\forall x.(A(x) \to B(y)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.(A(x) \to B(y))]_1}{A(x) \to B(y)}}{\exists y.(A(x) \to B(y))}}{\forall x.\exists y.(A(x) \to B(y))}}{\forall x.\exists y.(A(x) \to B(y))}\ 1$$

e a partire da tale dimostrazione non è difficile ricostruire il ticket richiesto. Sia infatti w un ticket per $\exists y.\forall x.(A(x) \to B(y))$; allora $\pi_2(w)$ è un ticket per $\forall x.(A(x) \to B(\pi_1(w)))$ e quindi, per qualsiasi elemento x, $\pi_2(w)(x)$ è un ticket per $A(x) \to B(\pi_1(w))$; ma allora $\langle \pi_1(w), \pi_2(w)(x)\rangle$ è un ticket per $\exists y.(A(x) \to B(y))$ e quindi $\lambda x.\langle \pi_1(w), \pi_2(w)(x)\rangle$ è un ticket per $\forall x.\exists y.(A(x) \to B(y))$.
L'altra implicazione invece vale solo classicamente e possiamo ottenerne una dimostrazione seguendo i passi suggeriti.
Primo passo (dimostrazione intuizionista):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x.\exists y.(A(x) \to B(y))}{\exists y.(A(x) \to B(y))} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x) \to B(y)]_2 \quad [A(x)]_1}{B(y)}}{\exists y.B(y)}}{A(x) \to \exists y.B(y)}\ 1}{A(x) \to \exists y.B(y)}\ 2}{\forall x.(A(x) \to \exists y.B(y))}$$

Secondo passo (dimostrazione intuizionista):

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x.A(x)]_2 \qquad \dfrac{[A(x)]_1 \qquad \dfrac{\forall x.(A(x) \to \exists y.B(y))}{A(x) \to \exists y.B(y)}}{\exists y.B(y)}}{\exists y.B(y)}\;1}{(\exists x.A(x)) \to (\exists y.B(y))}\;2$$

Terzo passo (dimostrazione classica):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg(\exists y.(\exists x.A(x)) \to B(y))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\forall y.\neg((\exists x.A(x)) \to B(y))}{\neg((\exists x.A(x)) \to B(y))} \\ \vdots \\ \exists x.A(x)\end{array} \qquad (\exists x.A(x)) \to (\exists y.B(y))}{\exists y.B(y)} \qquad \dfrac{[B(y)]_1 \qquad \begin{array}{c}[\neg(\exists y.(\exists x.A(x)) \to B(y))]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\forall y.\neg((\exists x.A(x)) \to B(y))}{\neg((\exists x.A(x)) \to B(y))} \\ \vdots \\ \neg B(y)\end{array}}{\bot}}{\bot}\;1}{\exists y.(\exists x.A(x)) \to B(y)}\;c$$

dove si è fatto uso del taccuino classico.
Quarto passo (dimostrazione intuizionista):

$$\dfrac{\exists y.(\exists x.A(x)) \to B(y) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(\exists x.A(x)) \to B(y)]_2 \qquad \dfrac{[A(x)]_1}{\exists x.A(x)}}{B(y)}}{A(x) \to B(y)}\;1}{\forall x.(A(x) \to B(y))}}{\exists y.\forall x.(A(x) \to B(y))}}{\exists y.\forall x.(A(x) \to B(y))}\;2$$

Ci manca quindi solo da far vedere che la dimostrazione richiede inevitabilmente qualche passo classico (nel nostro caso il terzo passo). Per fare questo possiamo considerare una interpretazione su un dominio di due elementi. In questo caso interpretare la formula predicativa $\forall x.\exists y.(A(x) \to B(y)) \to \exists y.\forall x.(A(x) \to B(y))$ diventa equivalente ad interpretare la formula proposizionale

$$\begin{array}{l}(((A_1 \to B_1) \vee (A_1 \to B_2)) \wedge ((A_2 \to B_1) \vee (A_2 \to B_2))) \to \\ \qquad (((A_1 \to B_1) \wedge (A_2 \to B_1)) \vee ((A_1 \to B_2) \wedge (A_2 \to B_2)))\end{array}$$

che, nel caso in cui A_1 coincida con B_1 e A_2 coincida con B_2 diventa equivalente a

$$(B_2 \to B_1) \vee (B_1 \to B_2)$$

che sappiamo non valere intuizionisticamente visto che si può falsificare nell'algebra di Heyting

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & * & \\ a & & b \\ & 0 & \end{array}$$

interpretando B_1 in a e B_2 in b.

Esercizio 2
Sia B un'algebra di Boole.

- Sia X un sottoinsieme non vuoto di B e si definisca

  $$\uparrow X \equiv \{y \in B \mid \text{esiste } n \in \mathcal{N} \text{ e } x_1, \ldots, x_n \in X \text{ tali che } x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y\}$$

  Dimostrare che $\uparrow X$ è un filtro di B, eventualmente contenente lo 0 dell'algebra.

- Sia ora F un filtro di B e si ponga

  $$x =_F y \text{ se e solo se } y \in\uparrow (F \cup \{x\}) \text{ e } x \in\uparrow (F \cup \{y\})$$

  Dimostrare che $x =_F y$ è una congruenza su B, cioè una relazione di equivalenza che rispetta tutte le operazioni.

Soluzione.
Per quanto riguarda il primo punto dobbiamo dimostrare i fatti seguenti.

- $1 \in\uparrow X$ che vale banalmente visto che, sapendo che X non è vuoto possiamo considerare un qualunque elemento $x_1 \in X$ e quindi otteniamo che esiste $n \in \mathcal{N}$, cioè $n = 1$, tale che $x_1 \leq 1$.

- Se $y_1 \in\uparrow X$ e $y_2 \in\uparrow X$ allora $y_1 \wedge y_2 \in\uparrow X$. Per ipotesi sappiamo che esistono n e m tali che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_1$ e $x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_{n+m} \leq y_2$ per opportuni $x_1, \ldots, x_{n+m} \in X$. Ma allora $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_{n+m} \leq y_1 \wedge y_2$.

- Se $y_1 \in\uparrow X$ e $y_1 \leq y_2$ allora $y_2 \in\uparrow X$. Per ipotesi sappiamo che esiste n tale che $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_1$ per opportuni $x_1, \ldots, x_n \in X$. Ma allora $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq y_2$ segue dal fatto che $y_1 \leq y_2$.

Veniamo allora al secondo punto. Vediamo prima di tutto che si tratta di una relazione di equivalenza

- $x =_F x$ segue immediatamente dal fatto che $x \in\uparrow (F \cup \{x\})$.

- Se $x =_F y$ allora $y =_F x$. Ovvio, visto che la definizione è simmetrica.

- Se $x =_F y$ e $y =_F z$ allora $x =_F z$. Se $x =_F y$ allora esistono $w_1, t_1 \in F$ tale che $w_1 \wedge x \leq y$ e $t_1 \wedge y \leq x$. D'altra parte se $y =_F z$ allora esistono $w_2, t_2 \in F$ tale che $w_2 \wedge y \leq z$ e $t_2 \wedge z \leq y$. Ma allora $w_2 \wedge w_1 \wedge x \leq w_2 \wedge y \leq z$ e $t_1 \wedge t_2 \wedge z \leq t_1 \wedge y \leq x$ e quindi $x =_F z$.

Per dimostrare che si tratta di una congruenza dobbiamo invece vedere che rispetta le operazioni.

- Se $x_1 =_F x_2$ e $y_1 =_F y_2$ allora $x_1 \wedge y_1 =_F x_2 \wedge y_2$. Se $x_1 =_F x_2$ allora esistono $w_1, w_2 \in F$ tali che $w_1 \wedge x_1 \leq x_2$ e $w_2 \wedge x_2 \leq x_1$. D'altra parte se $y_1 =_F y_2$ allora esistono $t_1, t_2 \in F$ tali che $t_1 \wedge y_1 \leq y_2$ e $t_2 \wedge y_2 \leq y_1$. Quindi $w_1 \wedge t_1 \wedge x_1 \wedge y_1 \leq x_2 \wedge y_2$ e $w_2 \wedge t_2 \wedge x_2 \wedge y_2 \leq x_1 \wedge y_1$ che implicano che $x_1 \wedge y_1 =_F x_2 \wedge y_2$.

- Se $x_1 =_F x_2$ e $y_1 =_F y_2$ allora $x_1 \vee y_1 =_F x_2 \vee y_2$. Come prima se $x_1 =_F x_2$ allora esistono $w_1, w_2 \in F$ tali che $w_1 \wedge x_1 \leq x_2$ e $w_2 \wedge x_2 \leq x_1$ e se $y_1 =_F y_2$ allora esistono $t_1, t_2 \in F$ tale chi $t_1 \wedge y_1 \leq y_2$ e $t_2 \wedge y_2 \leq y_1$. Quindi $(w_1 \wedge x_1) \vee (t_1 \wedge y_1) \leq x_2 \vee y_2$ e $(w_2 \wedge x_2) \vee (t_2 \wedge y_2) \leq x_1 \vee y_1$. Ma ora osserviamo che

$$(w_1 \wedge x_1) \vee (t_1 \wedge y_1) = (w_1 \vee t_1) \wedge (w_1 \vee y_1) \wedge (t_1 \vee x_1) \wedge (x_1 \vee y_1)$$

  e

$$(w_2 \wedge x_2) \vee (t_2 \wedge y_2) = (w_2 \vee t_2) \wedge (w_2 \vee y_2) \wedge (t_2 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee y_2)$$

  e che $w_1 \vee t_1$, $w_1 \vee y_1$, $t_1 \vee x_1$ e $w_2 \vee t_2$, $w_2 \vee y_2$, $t_2 \vee x_2$ sono tutti elementi che stanno in F perchè un filtro è chiuso verso l'alto. Perciò abbiamo che $x_1 \vee y_1 =_F x_2 \vee y_2$.

- Se $x_1 =_F x_2$ allora $\nu x_1 =_F \nu x_2$. Come prima se $x_1 =_F x_2$ allora esistono $w_1, w_2 \in F$ tali che $w_1 \wedge x_1 \leq x_2$ e $w_2 \wedge x_2 \leq x_1$. Ma allora $w_1 \wedge \nu x_2 \leq \nu x_1$ e $w_2 \wedge \nu x_1 \leq \nu x_2$ e quindi $\nu x_1 =_F \nu x_2$.

Esercizio 3

Sia T una teoria dei numeri naturali valida rispetto al modello standard (cioè, per ogni formula A, se $\vdash_T A$ allora $\models_N A$) e capace di esprimere le proprietà di somma e prodotto. Si consideri ora una enumerazione delle formule scritte nel linguaggio di T, sia cioè A_0, A_1, ... una lista numerabile delle formule, e si ponga $\mathsf{Th} = \{n \in \mathcal{N} \mid \vdash_T A_n\}$ il sottoinsieme dei numeri naturali delle formule che sono teoremi di T.

Si dimostri che se Th è un insieme effettivamente listabile ma con funzione caratteristica non calcolabile allora esiste una proposizione vera nel modello standard che non è dimostrabile in T.

Soluzione.

Visto che per ipotesi Th è un insieme effettivamente listabile sappiamo che esiste una formula del tipo $\exists x_1 \ldots x_n.p(y, x_1, \ldots, x_n) = 0$, dove $p(y, x_1, \ldots, x_n)$ è un polinomio diofanteo scritto utilizzando solo somme e prodotti, tale che

$$n \in \mathsf{Th} \text{ se e solo se } \models_N \exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Consideriamo quindi il complemento $\mathsf{C}(\mathsf{Th})$ dell'insieme Th. Tale insieme non può essere effettivamente listabile, altrimenti Th avrebbe funzione caratteristica ricorsiva. D'altra parte l'insieme $\{n \in \mathcal{N} \mid \vdash_T \neg\exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ risulta essere effettivamente listabile visto che basta listare Th e tenere n quando appare in Th una formula A_k che sia proprio uguale a $\neg\exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Ma allora $\mathsf{C}(\mathsf{Th})$ e $\{n \in \mathcal{N} \mid \vdash_T \neg\exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ non possono essere lo stesso insieme, visto che uno è effettivamente listabile e l'altro no.

D'altra parte $\{n \in \mathcal{N} \mid \vdash_T \neg\exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$ è un sottonsieme di $\mathsf{C}(\mathsf{Th})$ perchè se accade che $\vdash_T \neg\exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0$ allora, a causa della validità di T, si ottiene $\models_N \neg\exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0$ e quindi $n \in \mathsf{C}(\mathsf{Th})$.

Ma allora deve accadere che, per qualche numero naturale k, k appartiene a $\mathsf{C}(\mathsf{Th})$ mentre k non appartiene a $\{n \in \mathcal{N} \mid \vdash_T \neg\exists x_1 \ldots x_n.p(n, x_1, \ldots, x_n) = 0\}$, cioè la formula $\neg\exists x_1 \ldots x_n.p(k, x_1, \ldots, x_n) = 0$ risulta essere vera nel modello standard ma non dimostrabile in T.