

# COMPITO di LOGICA MATEMATICA

6 aprile 2011

Nome:

Matricola:

## Esercizio 1

Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista ed un ticket se vale anche intuizionisticamente

1.  $(A \rightarrow (B \vee C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$
2.  $((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$
3.  $\exists x.((\exists x.A(f(x))) \rightarrow A(x))$

## Soluzione.

Una dimostrazione classica della prima implicazione è la seguente (come al solito i puntini indicano l'utilizzo del "taccuino").

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(A \rightarrow C) \\
 \hline
 \neg(A \rightarrow B)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(A \rightarrow C) \\
 \hline
 \neg(A \rightarrow B)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 \neg(A \rightarrow B) \wedge \neg(A \rightarrow C) \\
 \hline
 \neg(A \rightarrow C)
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 A \quad A \rightarrow (B \vee C) \\
 \hline
 B \vee C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 [B]_1 \quad \neg B \\
 \hline
 \perp
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \vdots \\
 [C]_1 \quad \neg C \\
 \hline
 \perp
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \perp \quad 1 \\
 \hline
 (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \quad c
 \end{array}
 \end{array}$$

Per convincersi che questa implicazione non può che essere classica basta osservare che se poniamo  $A \equiv (B \vee C)$  allora la proposizione da dimostrare diviene equivalente a  $((B \vee C) \rightarrow B) \vee ((B \vee C) \rightarrow C)$  che sappiamo come falsificare nell'algebra di Heyting

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 \\
 b \vee c \\
 b \quad c \\
 0
 \end{array}$$

Pe quanto riguarda invece la seconda proposizione possiamo fornirne una derivazione intuizionista.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 [A]_1 \quad [A \rightarrow B]_3 \\
 \hline
 B \\
 \hline
 B \vee C
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 [A]_2 \quad [A \rightarrow C]_3 \\
 \hline
 C \\
 \hline
 B \vee C
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C) \quad \frac{B \vee C}{A \rightarrow (B \vee C)} 1 \quad \frac{B \vee C}{A \rightarrow (B \vee C)} 2 \\
 \hline
 A \rightarrow (B \vee C) \quad 3
 \end{array}
 \end{array}$$

Visto che si tratta di una implicazione valida intuizionisticamente possiamo ottenerne un ticket. Si supponga quindi che  $x$  sia un ticket per  $A$  e  $h$  sia un ticket per  $A \rightarrow B$ ; allora  $h(x)$  è un ticket per  $B$  e quindi  $i(h(x))$  è un ticket per  $B \vee C$  e  $\lambda x.i(h(x))$  è un ticket per  $A \rightarrow (B \vee C)$ . Analogamente, se  $k$  è un ticket per  $A \rightarrow C$  allora  $\lambda y.j(k(y))$  è un ticket per  $A \rightarrow (B \vee C)$ . Quindi se  $w$  è un ticket per  $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$  allora  $\text{when}(w, \lambda h.\lambda x.i(h(x)), \lambda k.\lambda y.j(k(y)))$  è un ticket per  $A \rightarrow (B \vee C)$ .

Veniamo infine alla terza proposizione. Non è difficile vedere che si tratta di una variante del principio del bevitore; possiamo quindi fornirne la seguente derivazione classica.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\vdots \\
\forall x. \neg((\exists x.A(f(x))) \rightarrow A(x)) \\
\hline
\neg((\exists x.A(f(x))) \rightarrow A(x))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
[\neg(\exists x.((\exists x.A(f(x))) \rightarrow A(x)))]_c \\
\vdots \\
\forall x. \neg((\exists x.A(f(x))) \rightarrow A(x)) \\
\hline
\neg((\exists x.A(f(x))) \rightarrow A(f(x)))
\end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\vdots \\
\exists x.A(f(x))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
[A(f(x))]_1 \\
\hline
\perp
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\vdots \\
\neg(A(f(x)))
\end{array}
\end{array}$$

$$\frac{\perp}{1}$$

$$\frac{\exists x.((\exists x.A(f(x))) \rightarrow A(x))}{\perp} \quad c$$

Per vedere che vale solo classicamente possiamo considerare una interpretazione su un dominio di due elementi tale che il segno per funzione  $f$  venga interpretato nella funzione identica. Allora la nostra formula risulta equivalente alla seguente

$$((B \vee C) \rightarrow B) \vee ((B \vee C) \rightarrow C)$$

che abbiamo già visto come falsificare.

## Esercizio 2

Si fornisca un esempio di algebra di Heyting avente elementi non banali, diversi cioè da 0 e 1, dotati di complemento insieme ad elementi non banali senza complemento.

Sia ora  $H$  un'algebra di Heyting.

- Si dimostri che la posizione  $\nu x \equiv x \rightarrow 0$  è la migliore approssimazione possibile di un complemento, cioè per tutti gli elementi  $x$  di  $H$  dotati di complemento  $x \rightarrow 0$  coincide con tale complemento.
- Si dimostri che  $B = \{x \in H \mid x \vee (x \rightarrow 0) = 1\}$  è un'algebra di Boole.

## Soluzione.

Un esempio di algebra di Heyting avente elementi dotati di complemento insieme ad elementi senza complemento è la seguente.

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & c & d \\ a & & b \\ & 0 & \end{array}$$

dove  $a$  e  $d$  sono l'uno il complemento dell'altro, mentre  $c$  e  $b$  non hanno complemento.

Per quanto riguarda il prossimo punto supponiamo che  $x$  sia un elemento di  $H$  dotato di complemento  $y$ , cioè tale che  $x \wedge y = 0$  e  $x \vee y = 1$ . Ora la prima delle due ci mostra che  $y \leq x \rightarrow 0$  e quindi ne segue che  $x \vee y \leq x \vee (x \rightarrow 0)$ ; ma per ipotesi  $x \vee y = 1$  e quindi  $x \vee (x \rightarrow 0) = 1$ . D'altra parte  $x \wedge (x \rightarrow 0) \leq 0$  è una immediata conseguenza della definizione di implicazione. Quindi  $x \rightarrow 0$  è un complemento di  $x$  e perciò deve coincidere con  $y$  a causa del teorema di unicità del complemento che vale in ogni reticolo distributivo.

Veniamo ora all'ultimo punto. Si tratta di verificare che  $B$  è chiuso per le necessarie operazioni.

Ora sicuramente  $1 \in B$  visto che  $1 \vee (1 \rightarrow 0) = 1$  e  $0 \in B$  visto che  $0 \vee (0 \rightarrow 0) = 1$ .

Supponiamo quindi che  $x$  e  $y$  siano due elementi di  $B$  e vediamo  $x \wedge y$  è a sua volta un elemento di  $B$ , dobbiamo cioè verificare che se  $x \vee (x \rightarrow 0) = 1$  e  $y \vee (y \rightarrow 0) = 1$  allora  $(x \wedge y) \vee ((x \wedge y) \rightarrow 0) = 1$  vale in ogni algebra di Heyting. Il modo più facile per ottenere questo risultato consiste nell'usare la deduzione naturale intuizionista (sia  $C \equiv (A \wedge B) \vee ((A \wedge B) \rightarrow \perp)$ ).

$$\begin{array}{c} \frac{\frac{\frac{[A]_1 \quad [B]_2}{A \wedge B} \quad \frac{B \vee (B \rightarrow \perp)}{C}}{C} \quad \frac{\frac{[A \wedge B]_4}{B} \quad \frac{[B \rightarrow \perp]_2}{\perp}}{(A \wedge B) \rightarrow \perp} \quad 4}{C} \quad 2 \quad \frac{B \vee (B \rightarrow \perp)}{C} \quad 1 \\ \frac{\frac{\frac{[A \wedge B]_5}{A} \quad \frac{[A \rightarrow \perp]_1}{\perp}}{(A \wedge B) \rightarrow \perp} \quad 5 \quad \frac{\frac{[A \wedge B]_6}{B} \quad \frac{[B \rightarrow \perp]_3}{\perp}}{(A \wedge B) \rightarrow \perp} \quad 6}{C} \quad 3 \end{array}$$

Ora una dimostrazione analoga si deve costruire per quanto riguarda la disgiunzione (questa volta poniamo  $C \equiv (A \vee B) \vee ((A \vee B) \rightarrow \perp)$ ).

$$\begin{array}{c}
\frac{A \vee (A \rightarrow \perp) \quad \frac{\frac{[A]_1}{A \vee B} \quad \frac{B \vee (B \rightarrow \perp)}{C} \quad \frac{\frac{[B]_3}{A \vee B} \quad C}{C} \quad 1}{C} \quad 3}{C} \quad 5}{\frac{[A \vee B]_6 \quad \frac{\frac{[A]_5 \quad [A \rightarrow \perp]_1}{\perp} \quad \frac{[B]_5 \quad [B \rightarrow \perp]_3}{\perp}}{\perp} \quad 6}{C} \quad 3} \quad 1
\end{array}$$

Per finire dobbiamo solo far vedere che abbiamo anche il complemento, ma sappiamo che se c'è il complemento di  $x$  questo deve essere  $x \rightarrow 0$ . Quindi dobbiamo prima di tutto dimostrare che se  $x \in B$  allora anche  $x \rightarrow 0 \in B$ .

$$\begin{array}{c}
\frac{A \vee (A \rightarrow \perp) \quad \frac{\frac{[A]_1 \quad [A \rightarrow \perp]_2}{\perp} \quad (A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \quad 2}{(A \rightarrow \perp) \vee ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)} \quad \frac{[A \rightarrow \perp]_1}{(A \rightarrow \perp) \vee ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)} \quad 1}{(A \rightarrow \perp) \vee ((A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)} \quad 1
\end{array}$$

Così sappiamo che se  $x \in B$  allora anche  $x \rightarrow 0 \in B$ , ma se  $x \in B$  vuol dire che  $x \vee (x \rightarrow 0) = 1$  e quindi  $x \rightarrow 0$  è il complemento di  $x$  visto che  $x \wedge (x \rightarrow 0) = 0$  vale sempre.

**Esercizio 3**

Si supponga che l'insieme  $\Phi \equiv \{A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_n \rightarrow B_n, \dots\}$  sia un insieme non soddisfacibile di formule del primo ordine. Dimostrare che esiste un numero naturale  $k$  tale che  $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_k$ .

**Soluzione.**

Una immediata conseguenza del teorema di compattezza è che un insieme di formule è non soddisfacibile se e solo se ne esiste un sottoinsieme finito che non è soddisfacibile. Quindi se  $\Phi$  non è soddisfacibile allora deve esistere un suo sottoinsieme finito  $\Phi_1$  che non è soddisfacibile. Ma allora in tale sottoinsieme c'è una formula  $A_k \rightarrow B_k$  di indice massimo e quindi  $\Phi^* \equiv \{A_1 \rightarrow B_1, \dots, A_k \rightarrow B_k\}$  è pure un sottoinsieme di  $\Phi$  che non è soddisfacibile in quanto sovrainsieme di  $\Phi_1$ .

Ma allora neppure  $\{\neg A_1, \dots, \neg A_k\}$  può essere soddisfacibile perchè se ci fosse una interpretazione che rende vera la proposizione  $\neg A_i$  allora la stessa interpretazione renderebbe vera anche la proposizione  $A_i \rightarrow B_i$ .

Perciò ogni interpretazione rende falsa almeno una tra le  $\neg A_1, \dots, \neg A_k$  e quindi rende vera almeno una tra le  $A_1, \dots, A_k$ . Ma allora ogni interpretazione rende vera  $A_1 \vee \dots \vee A_k$  e quindi  $\vdash A_1 \vee \dots \vee A_k$  vale in conseguenza del teorema di completezza.