COMPITO di LOGICA MATEMATICA
27 giugno 2011

Nome: Matricola:

Esercizio 1

Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista ed un ticket se vale anche intuizionisticamente

1. $((A_1 \to B) \to A_2) \to (A_1 \vee A_2)$
2. $\forall x.(A(x) \vee A(f(x))) \to \forall x.A(f(x))$
3. $((\exists x.B(x)) \to (\forall x.A(x))) \to \forall x.(B(x) \to A(x))$

Soluzione.

Una dimostrazione classica della prima formula è la seguente

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(A_1 \to B) \to A_2$}
\AxiomC{$[\neg(A_1 \vee A_2]_c$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg A_1 \wedge \neg A_2$}
\UnaryInfC{$\neg A_1$}
\AxiomC{$[A_1]_1$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{B}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A_1 \to B$}
\BinaryInfC{A_2}
\AxiomC{$[\neg(A_1 \vee A_2]_c$}
\noLine\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine\UnaryInfC{$\neg A_1 \wedge \neg A_2$}
\UnaryInfC{$\neg A_2$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{c}
\UnaryInfC{$A_1 \vee A_2$}
\UnaryInfC{$((A_1 \to B) \to A_2) \to (A_1 \vee A_2)$}
\end{prooftree}
$$

Che si tratti di una tautologia solamente classica è conseguenza del fatto che se poniamo $A_2 \equiv \neg A_1$ e $B \equiv \bot$ allora $(A_1 \to B) \to A_2 \equiv \neg A_1 \to \neg A_1$ si può dimostrare intuizionisticamente mentre $A_1 \vee \neg A_1$ no.

Per quanto riguarda la seconda formula si vede subito che essa non vale neppure classicamente se consideriamo una interpretazione sui numeri naturali che manda A in "essere pari" e f nel successore; in questo caso infatti l'antecedente dell'implicazione sostiene che per ogni numero naturale n o è pari n o è pari $n + 1$, ma questo non implica che ogni successore sia pari.

L'ultima formula vale infine anche intuizionisticamente, infatti

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[B(x)]_1$}
\UnaryInfC{$\exists x.B(x)$}
\AxiomC{$(\exists x.B(x)) \to (\forall x.A(x))$}
\BinaryInfC{$\forall x.A(x)$}
\UnaryInfC{$A(x)$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$B(x) \to A(x)$}
\UnaryInfC{$\forall x.(B(x) \to A(x))$}
\end{prooftree}
$$

È ora facile costruire un ticket che codifica la dimostrazione ottenuta. Sia infatti y un generico ticket per $B(x)$ allora $\langle x, y\rangle$ è un ticket per $\exists x.B(x)$. Se h è allora un ticket per $(\exists x.B(x)) \to (\forall x.A(x))$ ne segue che $h(\langle x, y\rangle)$ è un ticket per $\forall x.A(x)$. Perciò $h(\langle x, y\rangle)(x)$ è un ticket per $A(x)$ e quindi $\lambda y.h(\langle x, y\rangle)(x)$ è un ticket per $B(x) \to A(x)$ e $\lambda x.\lambda y.h(\langle x, y\rangle)(x)$ è un ticket per $\forall x.(B(x) \to A(x))$. Quindi il ticket cercato è $\lambda h.\lambda x.\lambda y.h(\langle x, y\rangle)(x)$.

Esercizio 2
Sia B un'algebra di Boole e G un suo filtro.

- Siano $x, y \in B$. Dimostrare che $[x]_G$ coincide con $[y]_G$ in B/G se e solo se esiste $z \in G$ tale che $x \wedge z = y \wedge z$ (si ricordi che, per definizione, $[x]_G = [y]_G$ se e solo se $(x \to y) \wedge (y \to x) \in G$).

- Sia $y \in B$. Dimostrare che se, per ogni $x \in G$, $x \wedge y \neq 0$ allora $[y]_G \neq [0]_G$ in B/G.

- Sia $y \in B$ e si assuma che, per ogni $x \in G$, $x \wedge y \neq 0$. Si dimostri che esiste un ultrafiltro che estende G e contiene y (sugg.: si dimostri che se U^* è un ultrafiltro di B/G allora $U = \{x \in B \mid [x]_G \in U^*\}$ è un ultrafiltro di B).

Soluzione.
Ricordiamo che per definizione $[x]_G$ coincide con $[y]_G$ se e solo se $x \to y \in G$ e $y \to x \in G$. Quindi, se poniamo $z \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$, otteniamo che $x \wedge z \leq y \wedge (y \to x) \leq y$ che implica che $x \wedge z \leq y \wedge z$ e analogamente $y \wedge z \leq x \wedge (x \to y) \leq x$ che implica che $y \wedge z \leq x \wedge z$ per cui $x \wedge z = y \wedge z$.
D'altra parte se esiste $z \in G$ tale che $x \wedge z \leq y \wedge z$ allora $x \wedge z \leq y$ che implica $z \leq x \to y$ e perciò $x \to y \in G$ e analogamente $y \wedge z \leq x \wedge z$ mostra che $y \to x \in G$.

Abbiamo quindi dimostrato il primo punto. Il secondo è ora immediato. Se infatti supponiamo che $[y]_G = [0]_G$ in B/G allora deve esistere $z \in G$ tale che $y \wedge z = 0 \wedge z = 0$ contro l'ipotesi dell'esercizio.

Iniziamo dimostrando quanto suggerito. $1 \in U$ vale visto che $[1]_G \in U^*$. Inoltre, se $x \in U$ e $y \in U$ allora $[x]_G, [y]_G \in U^*$; quindi $[x \wedge y]_G = [x]_G \wedge [y]_G \in U^*$ e perciò $x \wedge y \in U$. Per di più, se $x \in U$ e $x \leq y$ allora $[x]_G \in U^*$ e $[x]_G \leq [y]_G$; perciò $[y]_G \in U^*$ e quindi $y \in U$. Quindi U è un filtro. Per vedere che si tratta di un ultrafiltro basta verificare che soddisfa anche la proprietà di essere primo. Supponiamo allora che $x \vee y \in U$; allora $[x \vee y]_G = [x]_G \vee [y]_G \in U^*$ e quindi $[x]_G \in U^*$ o $[y]_G \in U^*$ visto che per ipotesi U^* è un ultrafiltro; perciò $x \in U$ oppure $y \in U$.
Ora, in virtù del punto precedente, l'ipotesi dell'esercizio ci garantisce che $[y]_G \neq [0]_G$ e quindi per uno dei teoremi che abbiamo studiato a lezione sappiamo che esiste un ultrafiltro U^* in B/G che contiene $[y]_G$. Ma allora l'ultrafiltro U di B associato a tale ultrafiltro contiene sicuramente y e inoltre include G visto che, per ogni $x \in G$, $[x]_G = [1]_G \in U^*$.

Esercizio 3

Si consideri un linguaggio del primo ordine per trattare con i numeri naturali che abbia almeno i segni per zero, successore, somma, prodotto ed uguaglianza e sia A_1, A_2, ... una lista delle formule che in tale linguaggio si possono scrivere. Si dimostri che l'insieme $V \equiv \{n \in \mathcal{N} \mid \models_N A_n\}$ delle proposizioni vere nel modello standard non può essere listabile.

Soluzione.

Se V fosse listabile sarebbe listabile anche $V^* \equiv \{k \in \mathcal{N} \mid \models_N \neg A_k\}$ perchè posso mettere k in V^* non appena n va in V per un numero naturale n tale che A_n coincide con la formula $\neg A_k$.

Ma V^* è il complemento di V perchè $\models_N \neg A_k$ se e solo se $\not\models_N A_k$ e quindi $k \in V^*$ se e solo se $k \notin V$.

Quindi la funzione caratteristica f_V di V definita ponendo

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin V \\ 1 & \text{se } x \in V \end{cases}$$

sarebbe ricorsiva. Consideriamo ora l'insieme $K \equiv \{x \in \mathcal{N} \mid \ \phi_x(x) \text{ converge}\}$. Sappiamo che tale insieme è listabile ma non è ricorsivo. Sia p_K il polinomio diofanteo tale che $x \in K$ se e solo se esistono $\overline{y}$ in $\mathcal{N}$ tali che $p_K(x, \overline{y}) = 0$. Quindi $\exists \overline{y}.p_K(x, \overline{y}) = 0$ è una formula ed ha quindi un suo posto k nella lista delle formule. Ma allora per decidere sugli elementi dell'insieme K potrei usare la funzione caratteristica di V visto che $x \in K$ se e solo se $\exists \overline{y}.p_K(x, \overline{y}) = 0$ è vera se e solo se $f_V(k) = 1$; perciò K sarebbe ricorsivo.