COMPITO e SECONDO COMPITINO di LOGICA MATEMATICA
1 febbraio 2012

Nome: Matricola:

Esercizio 1

Supponiamo che A sia una proposizione che non dipende dalla variabile x e $B(x)$ sia una qualsiasi proposizione. Dimostrare, utilizzando direttamente la definizione di valutazione, che

$$V^\sigma(\forall x.A \vee B(x)) \leq V^\sigma(A \vee \forall x.B(x))$$

vale per ogni interpretazione $V^\sigma(-)$ in una struttura basata su una algebra di Boole completa.
(sugg.: si usi, dopo averli dimostrati, il fatto che in ogni algebra di Boole $x \leq y$ se e solo se $\nu y \leq \nu x$, che $\nu \bigvee_{i\in I} x_i = \bigwedge_{i\in I} \nu x_i$ e che $\nu \bigwedge_{i\in I} x_i = \bigvee_{i\in I} \nu x_i$)

Soluzione

Quando interpretiamo in una struttura basata su una algebra di Boole otteniamo che

$$V^\sigma(\forall x.A \vee B(x)) = \bigwedge_{d\in D} V^\sigma(A) \vee V^{\sigma(x/d)}(B(x))$$

e

$$V^\sigma(A \vee \forall x.B(x)) = V^\sigma(A) \vee \bigwedge_{d\in D} V^{\sigma(x/d)}(B(x))$$

visto che la variabile x non appare libera nella proposizione A.
Quindi per concludere basta fare vedere che in ogni algebra di Boole completa, per ogni elemento x e ogni famiglia $(y_i)_{i\in I}$ di elementi, accade che

$$\bigwedge_{i\in I} x \vee y_i \leq x \vee \bigwedge_{i\in I} y_i$$

Utilizzando il suggerimento possiamo farlo così

$$\begin{array}{lll} \bigwedge_{i\in I} x \vee y_i \leq x \vee \bigwedge_{i\in I} y_i & \text{se} & \nu(x \vee \bigwedge_{i\in I} y_i) \leq \nu(\bigwedge_{i\in I} x \vee y_i) \\ & \text{se} & \nu x \wedge \bigvee_{i\in I} \nu y_i \leq \bigvee_{i\in I} \nu x \wedge \nu y_i \\ & \text{se} & \bigvee_{i\in I} \nu y_i \leq \nu x \to \bigvee_{i\in I} \nu x \wedge \nu y_i \\ & \text{se} & \nu y_i \leq \nu x \to \bigvee_{i\in I} \nu x \wedge \nu y_i \text{ per ogni } i \in I \\ & \text{se} & \nu x \wedge \nu y_i \leq \bigvee_{i\in I} \nu x \wedge \nu y_i \text{ per ogni } i \in I \end{array}$$

dove l'ultima disuguaglianza è ovviamente vera.
Vediamo infine come si dimostrano i vari suggerimenti.

- Se $x \leq y$ allora $x \wedge \nu y \leq y \wedge \nu y = 0$ e quindi $\nu y \leq \nu x$; viceversa, se $\nu y \leq \nu x$ allora $x = \nu\nu x \leq \nu\nu y = y$.

- $x_i \leq \bigvee_{i\in I} x_i$, perciò $\nu \bigvee_{i\in I} x_i \leq \nu x_i$ e quindi $\nu \bigvee_{i\in I} x_i \leq \bigwedge_{i\in I} \nu x_i$;
viceversa, $\bigwedge_{i\in I} \nu x_i \leq \nu x_i$, perciò $x_i = \nu\nu x_i \leq \nu \bigwedge_{i\in I} \nu x_i$, quindi $\bigvee_{i\in I} x_i \leq \nu \bigwedge_{i\in I} \nu x_i$ e allora $\bigwedge_{i\in I} \nu x_i \leq \nu \bigvee_{i\in I} x_i$.

- $\bigwedge_{i\in I} x_i \leq x_i$, perciò $\nu x_i \leq \nu \bigwedge_{i\in I} x_i$ e quindi $\bigvee_{i\in I} \nu x_i \leq \nu \bigwedge_{i\in I} x_i$;
viceversa, $\nu x_i \leq \bigvee_{i\in I} \nu x_i$, perciò $\nu \bigvee_{i\in I} \nu x_i \leq \nu\nu x_i = x_i$, quindi $\nu \bigvee_{i\in I} \nu x_i \leq \bigwedge_{i\in I} x_i$ e allora $\nu \bigwedge_{i\in I} x_i \leq \bigvee_{i\in I} \nu x_i$.

Esercizio 2
Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica nel calcolo dei sequenti ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista nel calcolo dei sequenti ed un ticket se vale anche intuizionisticamente.

1. $(A \to B) \vee (B \to A)$
2. $(A \to (B \vee C)) \to (((B \to D) \wedge (C \to D)) \to (A \to D))$

Soluzione.
La prima proposizione vale solo classicamente. Una sua dimostrazione nel calcolo dei sequenti è la seguente

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, B \vdash A}{A \vdash B \to A}}{A \vdash (A \to B) \vee (B \to A)}}{A, \neg((A \to B) \vee (B \to A)) \vdash B}}{\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \vdash (A \to B)}}{\neg((A \to B) \vee (B \to A)) \vdash (A \to B) \vee (B \to A)}}{\vdash (A \to B) \vee (B \to A)}$$

mentre una struttura intuizionista che la falsifica è la seguente

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & c & \\ a & & b \\ & 0 & \end{array}$$

con l'interpretazione $V(A) = a$ e $V(B) = b$ che interpreta $(A \to B) \vee (B \to A)$ in c che è diverso da 1.
La seconda proposizione vale invece anche intuizionisticamente; eccone una dimostrazione

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(B \to D) \wedge (C \to D), A \vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B, A \vdash B \quad B, D, A \vdash D}{B, B \to D, A \vdash D}}{B, (B \to D) \wedge (C \to D), A \vdash D} \quad \dfrac{\dfrac{C, A \vdash C \quad C, D, A \vdash D}{C, C \to D, A \vdash D}}{C, (B \to D) \wedge (C \to D), A \vdash D}}{B \vee C, (B \to D) \wedge (C \to D), A \vdash D}}{A \to (B \vee C), (B \to D) \wedge (C \to D), A \vdash D}}{A \to (B \vee C), (B \to D) \wedge (C \to D) \vdash A \to D}}{A \to (B \vee C) \vdash ((B \to D) \wedge (C \to D)) \to (A \to D)}}{\vdash (A \to (B \vee C)) \to (((B \to D) \wedge (C \to D)) \to (A \to D))}$$

Per determinarne un ticket supponiamo che x sia un ticket per $A \to (B \vee C)$, y sia un ticket per $(B \to D) \wedge (C \to D)$ e z sia un ticket per A. Allora $x(z)$ è un ticket per $B \vee C$, $\pi_1(y)$ è un ticket per $B \to D$ e $\pi_2(y)$ è un ticket per $C \to D$. Quindi $\mathsf{when}(x(z), \lambda u.\pi_1(y)(u), \lambda v.\pi_2(y)(v))$ è un ticket per D.

Esercizio 3
Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica nel calcolo della deduzione naturale ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista nel calcolo della deduzione naturale ed un ticket se vale anche intuizionisticamente.

1. $(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))$
2. $(\forall x.A(x) \vee \neg A(x)) \rightarrow ((\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x)))$

Soluzione.
La prima proposizione vale solo classicamente. Una sua derivazione in deduzione naturale classica è la seguente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}[\neg((\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x)))]_c \\ \vdots \\ \neg(\exists x.A(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg A(x))\end{matrix}}{\neg(\exists x.A(x))} \\ \vdots \\ \forall x.\neg A(x)\end{matrix}}{\neg A(x)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\begin{matrix}[\neg((\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x)))]_c \\ \vdots \\ \neg(\exists x.A(x)) \wedge \neg(\exists x.\neg A(x))\end{matrix}}{\neg(\exists x.\neg A(x))} \\ \vdots \\ \forall x.\neg\neg A(x)\end{matrix}}{\neg\neg A(x)}}{\bot}}{(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))}\ c$$

mentre possiamo ottenerne un controesempio intuizionista se consideriamo una struttura su un unico elemento 0 e l'algebra di Heyting di tre elementi $\{0, a, 1\}$ e interpretiamo $A(x)$ in modo che $V(A)(0) = a$; infatti in questo modo otteniamo che la valutazione di $(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))$ è a ed è quindi diversa da 1.
La seconda proposizione vale invece anche intuizionisticamente.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x.A(x) \vee \neg A(x)]_1}{A(x) \vee \neg A(x)} \quad \dfrac{\dfrac{[A(x)]_2}{(\exists x.A(x)}}{(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))} \quad \dfrac{\dfrac{[\neg A(x)]_2}{\exists x.\neg A(x)}}{(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))}}{(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))}\ 2}{(\forall x.A(x) \vee \neg A(x)) \rightarrow ((\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x)))}\ 1$$

Ora se h è un ticket per $\forall x.A(x) \vee \neg A(x)$ allora $h(x)$ è un ticket per $A(x) \vee \neg A(x)$; quindi $\mathsf{when}(h(x), \lambda y.\mathsf{i}(\langle x, y\rangle), \lambda z.\mathsf{j}(\langle x, z\rangle))$ è un ticket per $(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))$ visto che $\mathsf{i}(\langle x, y\rangle)$ è un ticket per $(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))$ se y è un ticket per $A(x)$ e $\mathsf{j}(\langle x, z\rangle)$ è un ticket per $(\exists x.A(x)) \vee (\exists x.\neg A(x))$ se z è un ticket per $\neg A(x)$. Perciò il ticket desiderato è $\lambda h.\mathsf{when}(h(x), \lambda y.\mathsf{i}(\langle x, y\rangle), \lambda z.\mathsf{j}(\langle x, z\rangle))$ dove x è un qualsiasi elemento del dominio.

Esercizio 4
Dimostrare che la proprietà dei numeri reali che sostiene che ogni sottoinsieme superiormente limitato ha estremo superiore non è esprimibile al primo ordine. (sugg.: ricordarsi la costruzione degli infinitesimi)

Soluzione.
Consideriamo la teoria $\mathsf{Th}(R)$ dei numeri reali nel linguaggio che si considera più opportuno e supponiamo che S sia una proposizione del primo ordine che vale esattamente su tutte e sole le strutture con una relazione d'ordine tale che ogni insieme superiormente limitato ammetta estremo superiore. Allora abbiamo che $S \in \mathsf{Th}(R)$ visto che i numeri reali godono di tale proprietà.
Consideriamo ora il seguente insieme di formule:

$$\Gamma \equiv \mathsf{Th}(R) \cup \{x > 0, x < 1, x < \frac{1}{2}, \ldots, x < \frac{1}{n}, \ldots\}$$

Ora ogni sottoinsieme finito di Γ è soddisfacibile nella struttura dei numeri reali visto che un sottoinsieme finito contiene solo una quantità finita di proposizioni della forma $x < \frac{1}{n}$, che si possono facilmente soddisfare nella struttura dei numeri reali, e proposizioni che sono soddisfatte sui numeri reali visto che o appartengono alla teoria $\mathsf{Th}(R)$.
Ma allora anche tutto Γ dovrebbe essere soddisfatto e quindi dovrebbe esserci qualche elemento in cui interpretare la variabile x in modo da soddisfare tutte le proposizioni della forma $x < \frac{1}{n}$. Consideriamo quindi l'insieme di tutti gli elementi in cui x può essere interpretato e chiamiamolo l'insieme degli *infinitesimi*. Per come è definito, tale insieme è superiormente limitato visto che ad esempio 1 è maggiore di tutti i suoi elementi, ma non può avere estremo superiore. Supponiamo infatti che abbia estremo superiore s. Allora s deve essere un infinitesimo altrimenti esisterebbe un numero naturale n tale che $\frac{1}{n} \leq s$ e quindi $\frac{1}{n+1}$ sarebbe ancora un maggiorante di tutti gli infinitesi ma sarebbe minore di s. Tuttavia questo è assurdo perché vorrebbe dire che s è un infinitesimo più grande di tutti gli altri infinitesimi mentre ad esempio $s + s$ è ancora un infinitesimo ma è più grande di s. Quindi è assurdo assumere che ci sia una proposizione al primo ordine come S.