COMPITO e SECONDO COMPITINO di LOGICA MATEMATICA
1 febbraio 2013

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Supponiamo che A sia una proposizione che non dipende dalla variabile x e $B(x)$ sia una qualsiasi proposizione. Dimostrare, utilizzando direttamente la definizione di valutazione, che

$$V^{\sigma}(\exists x.A \wedge B(x)) = V^{\sigma}(A \wedge \exists x.B(x))$$

vale per ogni interpretazione $V^{\sigma}(-)$ in una struttura basata su una algebra di Heyting completa.

Soluzione
Sappiamo che

$$\begin{array}{rcl} V^{\sigma}(\exists x.A \wedge B(x)) & = & \bigvee_{d\in D} V^{\sigma(x/d)}(A \wedge B(x)) \\ & = & \bigvee_{d\in D} V^{\sigma(x/d)}(A) \wedge V^{\sigma(x/d)}(B(x)) \\ & = & \bigvee_{d\in D} V^{\sigma}(A) \wedge V^{\sigma(x/d)}(B(x)) \end{array}$$

e

$$V^{\sigma}(A \wedge \exists x.B(x)) \ = V^{\sigma}(A) \wedge \bigvee_{d\in D} V^{\sigma(x/d)}(B(x))$$

dove nel primo caso abbiamo sfruttato il fatto che la variabile x non appare libera in A.
Quindi per concludere è sufficiente mostrare che in ogni algebra di Heyting completa H

$$\bigvee_{i\in I} y \wedge x_i = y \wedge \bigvee_{i\in I} x_i$$

vale per ogni $y \in H$ e ogni famiglia I di elementi $x_i \in H$.
Ora abbiamo che, per ogni $i \in I$, $x_i \leq \bigvee_{i\in I} x_i$ e quindi $y \wedge x_i \leq y \wedge \bigvee_{i\in I} x_i$ che mostra subito che $\bigvee_{i\in I} y \wedge x_i \leq y \wedge \bigvee_{i\in I} x_i$.
D'altra parte $y \wedge x_i \leq \bigvee_{i\in I} y \wedge x_i$ e quindi $x_i \leq y \to \bigvee_{i\in I} y \wedge x_i$; ma questo implica che $\bigvee_{i\in I} x_i \leq y \to \bigvee_{i\in I} y \wedge x_i$ e quindi $y \wedge \bigvee_{i\in I} x_i \leq \bigvee_{i\in I} y \wedge x_i$.

Esercizio 2

Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica nel calcolo dei sequenti ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista nel calcolo dei sequenti ed un ticket se vale anche intuizionisticamente.

1. $(A \land \neg B) \lor (A \to B)$
2. $\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)$

(sugg.: si ricordi che il nome delle variabili quantificate non conta)

Soluzione.

La seguente è una dimostrazione classica della prima proposizione.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, B, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash B}}{A, B, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash A \to B}}{A, B, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash (A \land \neg B) \lor (A \to B)}}{A, B, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash \bot}}{A, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash \neg B}}{A, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash A \land \neg B}}{A, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash (A \land \neg B) \lor (A \to B)}}{A, \neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash B}}{\dfrac{\neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash A \to B}{\dfrac{\neg((A \land \neg B) \lor (A \to B)) \vdash (A \land \neg B) \lor (A \to B)}{\vdash (A \land \neg B) \lor (A \to B)}}}$$

Il modo più veloce per vedere che vale solo classicamente è instanziare la proposizione con $A \equiv \top$ ottenendo una proposizione che è intuizionisticamente equivalente a $\neg B \lor B$ che sappiamo valere solo classicamente.

Una dimostrazione classica della seconda proposizione è questa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A(y), A(z), \neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash A(y)}}{A(y), \neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash A(z) \to A(y)}}{A(y), \neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash \forall z.A(z) \to A(y)}}{A(y), \neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash \exists x.\forall y.A(y) \to A(x)}}{A(y), \neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash A(x)}}{\neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash A(y) \to A(x)}}{\neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash \forall y.A(y) \to A(x)}}{\neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)) \vdash \exists x.\forall y.A(y) \to A(x)}}{\vdash \exists x.\forall y.A(y) \to A(x)}$$

In questo caso per vedere che si tratta di una proposizione che vale solo classicamente possiamo considerare il fatto che se la interpretiamo in un dominio con due elementi essa risulta equivalente alla proposizione $((A_1 \to A_1) \land (A_2 \to A_1)) \lor ((A_1 \to A_2) \land (A_2 \to A_2))$ che è intuizionisticamente equivalente alla proposizione $(A_2 \to A_1) \lor (A_1 \to A_2)$ che sappiamo valere solo classicamente.

Esercizio 3
Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica nel calcolo della deduzione naturale ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista nel calcolo della deduzione naturale ed un ticket se vale anche intuizionisticamente.

1. $(\forall x.A(x) \to B(x)) \vee (\forall x.B(x) \to A(x))$
2. $\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)$

(sugg.: si ricordi che il nome delle variabili quantificate non conta)
Soluzione.
La prima proposizione non vale neppure classicamente. Si consideri ad esempio una interpretazione sulla struttura dei numeri naturali tale che $A(x)$ significhi che x è pari e $B(x)$ significhi che x è dispari. Allora non è vero ne che per ogni numero naturale se questo è pari allora è dispari ne che se questo è dispari allora è pari.
Per quanto riguarda la seconda proposizione, visto l'esercizio precedente, dobbiamo solo trovarne una dimostrazione in deduzione naturale classica.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(\exists x.\forall y.A(y) \to A(x))]_c \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(y)]_1}{A(z) \to A(y)}}{\forall z.A(z) \to A(y)}}{\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)}}{\bot}}{A(x)}}{A(y) \to A(x)}\,1}{\forall y.A(y) \to A(x)}}{\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)}}{\exists x.\forall y.A(y) \to A(x)}\,c
$$

Esercizio 4 Sia H un algebra di Heyting e F un suo filtro. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. F è un filtro massimale, cioè se $x \notin F$ allora $\uparrow F \cup \{x\} = H$
2. $x \to y \in F$ se e solo se $x \in F$ implica $y \in F$.

Soluzione.
Vediamo prima di tutto che (1) implica (2).
Supponiamo prima che $x \to y \in F$ e dimostriamo che se $x \in F$ allora $y \in F$. Infatti $x \to y \in F$ e $x \in F$ mostrano che $x \wedge (x \to y) \in F$ e quindi $y \in F$ perchè $x \wedge (x \to y) \leq y$. D'altra parte per vedere che se $x \in F$ implica $y \in F$ allora $x \to y \in F$ possiamo ragionare per casi sull'appartenenza di x ad F. Se $x \in F$ allora, dall'ipotesi che $x \in F$ implica $y \in F$, ne segue che $y \in F$ e quindi $x \to y \in F$ visto che $y \leq x \to y$ perchè $y \wedge x \leq y$. Se invece $x \notin F$ allora l'ipotesi di massimalità di F ci assicura che esiste $z \in F$ tale che $z \wedge x \leq 0$, ma allora $x \to 0 \in F$ e quindi anche in questo caso otteniamo $x \to y \in F$ visto che $x \to 0 \leq x \to y$ perchè $x \wedge (x \to 0) \leq 0 \leq y$.

Vediamo ora che (2) implica (1).
Supponiamo quindi che $x \notin F$ per dimostrare che $\uparrow F \cup \{x\} = H$. Ora l'ipotesi mostra che $x \in F$ implica $0 \in F$ ma per (2) questo significa che $x \to 0 \in F$; quindi $0 \in \uparrow F \cup \{x\}$, visto che $x \wedge (x \to 0) \leq 0$, cioè $\uparrow F \cup \{x\} = H$.

Esercizio 5
Dimostrare che non esiste nessuna formula del primo ordine in un linguaggio che contiene un simbolo predicativo binario R il cui intento è quello di descrivere una relazione d'ordine stretto che esprima il fatto che non ci sono catene discendenti infinite della forma

$$\ldots x_{n+1}\ R\ x_n\ R\ x_{n-1} \ldots x_1\ R\ x_0$$

(sugg.: supponete che A sia la formula che esprime tale proprietà rispetto alla relazione R e considerate il seguente insieme di formule

$$\{A, \forall x.\ \neg R(x,x), \forall x. \forall y. \forall z.\ R(x,y)\ \wedge\ R(y,z)\ \rightarrow\ R(x,z),\\ R(c_1,c_0), R(c_2,c_1), \ldots\}$$

dove c_0, c_1, $\ldots$ sono una quantità numerabile di nuove costanti; usate poi il teorema di compattezza).

Soluzione.
Notiamo prima di tutto che qualsiasi sottoinsieme finito dell'insieme di proposizioni considerato nel suggerimento si può soddisfare nella struttura dei numeri naturali interpretando il segno R nella usuale relazione d'ordine tra numeri naturali. Infatti in tale struttura A viene soddisfatta visto che nei numeri naturali non ci sono catene discendenti infinite perchè in un numero finito di passi ogni catena arriva a 0; d'altra parte per soddisfare la quantità finita di proposizioni della forma $R(c_i, c_j)$ basta interpretare le varie costanti in gioco in modo che la costante di pedice massimo sia interpretata in 0, la seguente in 1 e così via (sono un numero finito e quindi possiamo farlo).
Tuttavia non possiamo soddisfare contemporaneamente tutte le proposizioni dell'insieme senza costruire una catena discendente infinita contro quel che dice la proposizione A. Quindi, a causa del teorema di compattezza, ci troviamo di fronte ad una contraddizione che possiamo risolvere solo riconoscendo che non ci può essere nessuna proposizione del primo ordine che esprima il fatto che una struttura ordinata non ammette catene discendenti infinite.