COMPITO di LOGICA MATEMATICA
15 febbraio 2013

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica nel calcolo dei sequenti o in deduzione naturale ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista nel calcolo dei sequenti o in deduzione naturale ed un ticket se vale anche intuizionisticamente.

1. $(\neg\neg\exists x.A) \to (\exists x.\neg\neg A)$
2. $((B \wedge (\exists x.A(x)) \to (\forall x.\neg A(x))) \to (\forall x.B \to \neg A(x))$ dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$
3. $(B \to \exists x.A(x)) \to (\exists x.B \to A(x))$ dove $x \notin \mathsf{FV}(B)$

Soluzione.
La seguente è una dimostrazione classica della prima proposizione

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg\neg\exists x.A$}
\AxiomC{$[\neg\exists x.A]_{c_1}$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{c_1}
\UnaryInfC{$\exists x.A$}
\AxiomC{$[A]_2$}
\AxiomC{$[\neg A]_1$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$\neg\neg A$}
\AxiomC{$[\neg\exists x.\neg\neg A]_{c_2}$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\forall x.\neg\neg\neg A$}
\UnaryInfC{$\neg\neg\neg A$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{2}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{c_2}
\UnaryInfC{$\exists x.\neg\neg A$}
\end{prooftree}
$$

D'altra parte non può esserci una dimostrazione intuizionista di questa proposizione perché se ne consideriamo una interpretazione in un dominio di due elementi $\{1, 2\}$ otteniamo che essa che si può falsificare su una algebra di Heyting di cinque elementi

$$
\begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
 & b & \\
a_1 & & a_2 \\
 & 0 &
\end{array}
$$

con una interpretazione tale che $V^{\sigma[x/1]}(A) = a_1$ e $V^{\sigma[x/2]}(A) = a_2$.
Invece la seguente è una dimostrazione intuizionista della seconda proposizione decorata con i ticket adatti

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$[y : A(x)]_1$}
\AxiomC{$[z : B]_2$}
\AxiomC{$[y : A(x)]_1$}
\UnaryInfC{$\langle x, y\rangle : \exists x.A(x)$}
\BinaryInfC{$\langle z, \langle x, y\rangle\rangle : B \wedge \exists x.A(x)$}
\AxiomC{$h : (B \wedge (\exists x.A(x)) \to (\forall x.\neg A(x))$}
\BinaryInfC{$h(\langle z, \langle x, y\rangle\rangle) : \forall x.\neg A(x)$}
\UnaryInfC{$h(\langle z, \langle x, y\rangle\rangle)(x) : \neg A(x)$}
\BinaryInfC{$h(\langle z, \langle x, y\rangle\rangle)(x)(y) : \bot$}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$\lambda y.h(\langle z, \langle x, y\rangle\rangle)(x)(y) : \neg A(x)$}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\lambda z.\lambda y.h(\langle z, \langle x, y\rangle\rangle)(x)(y) : B \to \neg A(x)$}
\UnaryInfC{$\lambda x.\lambda z.\lambda y.h(\langle z, \langle x, y\rangle\rangle)(x)(y) : \forall x.B \to \neg A(x)$}
\end{prooftree}
$$

e quindi il ticket desiderato è $\lambda h.\lambda x.\lambda z.\lambda y.h(\langle z, \langle x, y\rangle\rangle)(x)(y)$.
La terza è di nuovo una proposizione che vale solo classicamente.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\exists x.B \to A(x)]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\forall x.\neg(B \to A(x))}{\neg(B \to A(x))} \\ \vdots \\ B\end{array} \qquad B \to \exists x.A(x)}{\exists x.A(x)} \qquad \dfrac{[A(x)]_1 \qquad \begin{array}{c}[\neg\exists x.B \to A(x)]_c \\ \vdots \\ \dfrac{\forall x.\neg(B \to A(x))}{\neg(B \to A(x))} \\ \vdots \\ \neg A(x)\end{array}}{\bot}}{\bot}\,1}{\exists x.B \to A(x)}\,c
$$

Per vedere che non può esserci una dimostrazione intuizionista di questa proposizione basta considerare una interpretazione in un dominio di due elementi $\{1, 2\}$ e una algebra di Heyting di cinque elementi

$$
\begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
 & b & \\
a_1 & & a_2 \\
 & 0 &
\end{array}
$$

con una interpretazione tale che $V^{\sigma[x/1]}(A(x)) = a_1$, $V^{\sigma[x/2]}(A(x)) = a_2$ e $V^{\sigma}(B) = b$.

Esercizio 2
Sia H una algebra di Heyting. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti

1. per ogni $x \in H$, $\nu x \vee \nu\nu x = 1$
2. per ogni $x, y \in H$, $(x \to \nu y) \vee (\nu y \to x) = 1$
3. per ogni $x, y \in H$, $\nu(x \wedge \nu y) \leq \nu x \vee \nu\nu y$

Esibire un esempio di algebra di Heyting (che non sia un'algebra di Boole) in cui esse valgono e un esempio in cui esse non valgono.
(sugg.: ricordarsi del teorema di validità!)

Soluzione.
Seguendo il suggerimento possiamo sviluppare le varie prove in deduzione naturale intuizionista. Vediamo quindi che (1) implica (2).

$$\dfrac{\neg A \vee \neg\neg A \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A]_4 \quad [A]_1}{\bot}}{\neg B}}{A \to \neg B}\,1}{(A \to \neg B) \vee (\neg B \to A)} \qquad \dfrac{\neg B \vee \neg\neg B \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg B]_3}{A \to \neg B}}{(A \to \neg B) \vee (\neg B \to A)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg B]_3 \quad [\neg B]_2}{\bot}}{A}}{\neg B \to A}\,2}{(A \to \neg B) \vee (\neg B \to A)}}{(A \to \neg B) \vee (\neg B \to A)}\,3}{(A \to \neg B) \vee (\neg B \to A)}\,4$$

Vediamo ora che (2) implica (3).

$$\dfrac{(A \to \neg B) \vee (\neg B \to A) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_1 \quad \dfrac{[A]_1 \quad [A \to \neg B]_3}{\neg B}}{A \wedge \neg B} \qquad \neg(A \wedge \neg B)}{\bot}}{\neg A}\,1}{\neg A \vee \neg\neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg B]_2 \quad [\neg B \to A]_3}{A} \qquad [\neg B]_2}{A \wedge \neg B} \qquad \neg(A \wedge \neg B)}{\bot}}{\neg\neg B}\,2}{\neg A \vee \neg\neg B}}{\neg A \vee \neg\neg B}\,3$$

Per vedere infine che (3) implica (1) basta instanziare (3) con $y \equiv x$ ottenendo $\nu(x \wedge \nu x) \leq \nu x \vee \nu\nu x$ che mostra che $\nu x \vee \nu\nu x = 1$ visto che $\nu(x \wedge \nu x) = 1$.

Visto che si tratta di tre condizioni equivalenti per ogni algebra di Hayting per finire l'esercizio basta trovare una algebra di Heyting, che non sia di Boole, in cui vale una qualsiasi di esse ed una algebra di Heyting in cui non vale una qualsiasi di esse.
Per quanto riguarda il primo punto basta considerare la prima proprietà sulla solita algebra di tre elementi $0 < a < 1$. Infatti se $x \equiv 0$ o $x \equiv 1$ allora (1) chiaramente vale mentre se $x \equiv a$ allora $\nu x \equiv 0$ e quindi $\nu\nu x = 1$ che implica che $\nu x \vee \nu\nu x = 1$.
Per quanto riguarda invece il controesempio sappiamo bene che $\nu a \vee \nu\nu a$ non è uguale ad 1 nell'algebra di Heyting

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & * & \\ a & & * \\ & 0 & \end{array}$$

Esercizio 3
Si consideri un linguaggio del primo ordine per trattare con i numeri naturali che abbia almeno i segni per zero, successore, somma, prodotto ed uguaglianza e sia A_1, A_2, ... una lista delle formule che in tale linguaggio si possono scrivere. Si dimostri che l'insieme $V \equiv \{n \in \mathcal{N} \mid \models_N A_n\}$ delle proposizioni vere nel modello standard non può essere listabile.
(sugg.: si ricordi che con un linguaggio come quello ipotizzato è possibile scrivere la proposizione che vale per un numero naturale x se e solo se $x \in K$)

Soluzione.
Se V fosse listabile sarebbe listabile anche $V^* \equiv \{k \in \mathcal{N} \mid \models_N \neg A_k\}$ perché posso mettere k in V^* non appena n va in V per un numero naturale n tale che A_n coincide con la formula $\neg A_k$.
Ma V^* è il complemento di V perchè $\models_N \neg A_k$ se e solo se $\not\models_N A_k$ e quindi $k \in V^*$ se e solo se $k \notin V$.
Quindi la funzione caratteristica f_V di V definita ponendo

$$f_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin V \\ 1 & \text{se } x \in V \end{cases}$$

sarebbe ricorsiva. Consideriamo ora l'insieme $K \equiv \{x \in \mathcal{N} \mid \ \phi_x(x) \text{ converge}\}$. Sappiamo che tale insieme è listabile ma non è ricorsivo. Sia p_K il polinomio diofanteo tale che $x \in K$ se e solo se esistono $\overline{y}$ in $\mathcal{N}$ tali che $p_K(x, \overline{y}) = 0$. Quindi $\exists \overline{y}. p^1_K(x, \overline{y}) = p^2_K(x, \overline{y})$, per opportuni p^1_K e p^2_K è una formula ed ha quindi un suo posto k nella lista delle formule. Ma allora per decidere sugli elementi dell'insieme K potrei usare la funzione caratteristica di V visto che $x \in K$ se e solo se $\exists \overline{y}. p^1_K(x, \overline{y}) = p^2_K(x, \overline{y})$ è vera se e solo se $f_V(k) = 1$; perciò K sarebbe ricorsivo.