COMPITO di LOGICA MATEMATICA
25 agosto 2014

Nome: Matricola:

Esercizio 1
Si considerino le seguenti proposizioni e se ne discuta la validità classica o intuizionista fornendo, per ciascuna di esse un controesempio classico se non vale neppure classicamente, una dimostrazione classica ed un controesempio intuizionista se vale solo classicamente, una dimostrazione intuizionista ed un ticket se vale anche intuizionisticamente.

(1) $\neg\neg(((A \vee B) \to \neg\neg A) \vee ((A \vee B) \to \neg\neg B))$

(2) $\exists x.\forall y.(A(x) \to A(y))$

(3) $(\forall x.A(x) \to B(x)) \vee (\forall x.B(x) \to A(x))$

Soluzione.
La proposizione vale sia classicamente che intuizionisticamente. Una dimostrazione, arricchita con i ticket, sviluppata nel calcolo dei sequenti intuizionista è la seguente (scriviamo C come abbreviazione della formula $((A \vee B) \to \neg\neg A) \vee ((A \vee B) \to \neg\neg B)$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{z:\neg C, x:A \vdash x:A \quad z:\neg C, t:\bot \vdash t:\bot}{z:\neg C, x:A, h:\neg A \vdash h(x):\bot} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{y:B, h:\neg A, s:A\vee B \vdash y:B \quad y:B, h:\neg A, s:A\vee B, t:\bot \vdash t:\bot}{y:B, h:\neg A, s:A\vee B, k:\neg B \vdash k(y):\bot}}{y:B, h:\neg A, s:A\vee B \vdash \lambda k.k(y):\neg\neg B}}{y:B, h:\neg A \vdash \lambda s.\lambda k.k(y):(A\vee B)\to\neg\neg B}}{y:B, h:\neg A \vdash \mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y)):C}}{z:\neg C, y:B, h:\neg A \vdash z(\mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y))):\bot}}{z:\neg C, s:A\vee B, h:\neg A \vdash \mathsf{when}(s,\lambda x.h(x),\lambda y.z(\mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y)))):\bot}}{z:\neg C, s:A\vee B \vdash \lambda h.\mathsf{when}(s,\lambda x.h(x),\lambda y.z(\mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y)))):\neg\neg A}}{\dfrac{z:\neg C \vdash \lambda s.\lambda h.\mathsf{when}(s,\lambda x.h(x),\lambda y.z(\mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y)))):(A\vee B)\to\neg\neg A}{\dfrac{z:\neg C \vdash \mathsf{inl}(\lambda s.\lambda h.\mathsf{when}(s,\lambda x.h(x),\lambda y.z(\mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y))))):C}{\dfrac{z:\neg C \vdash z(\mathsf{inl}(\lambda s.\lambda h.\mathsf{when}(s,\lambda x.h(x),\lambda y.z(\mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y)))))):\bot}{\vdash \lambda z.z(\mathsf{inl}(\lambda s.\lambda h.\mathsf{when}(s,\lambda x.h(x),\lambda y.z(\mathsf{inr}(\lambda s.\lambda k.k(y)))))):\neg\neg C}}}}$$

La seconda proposizione vale invece solo classicamente. Consideriamo infatti la seguente dimostrazione in deduzione naturale classica:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg(\exists x.\forall y.A(x) \to A(y))]_c \\ \vdots \\ \forall x.\exists y.\neg(A(x) \to A(y))\end{matrix}}{\exists y.\neg(A(x) \to A(y))} \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\neg(\exists y.\forall z.A(y) \to A(z))]_c \\ \vdots \\ \forall y.\exists z.\neg(A(y) \to A(z))\end{matrix}}{\exists z.\neg(A(y) \to A(z))} \quad \dfrac{\begin{matrix}[\neg(A(x) \to A(y))]_1 \\ \vdots \\ \neg A(y)\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\neg(A(y) \to A(z))]_2 \\ \vdots \\ A(y)\end{matrix}}{\bot}}{\bot}\,2}{\bot}\,1}{\bot}}{\exists x.\forall y.(A(x) \to A(y))}\,c$$

Tuttavia se consideriamo una interpretazione in un dominio con due elementi la proposizione considerata diventa equivalente alla proposizione

$$((A_1 \to A_1) \wedge (A_1 \to A_2)) \vee ((A_2 \to A_1) \wedge (A_2 \to A_2))$$

che è intuizionisticamente equivalente a $(A_1 \to A_2) \vee (A_2 \to A_1)$ che sappiamo non essere intuizionisticamente valida.

Infine l'ultima proposizione non è valida neppure classicamente. Per falsificarla basta interpretare A nel sottoinsieme dei numeri pari dei numeri naturali e B nel sottoinsieme dei numeri dispari dei numeri naturali visto che non è vero ne che, per tutti i naturali, essere pari implica essere dispari ne che essere dispari implica essere pari.

Esercizio 2
Sia B un'algebra di Boole e F_1 e F_2 due suoi filtri. Si dimostri che $F_1 \cap F_2$ è un filtro.
Si provi che la seguente

$$k_i([x]_{F_1 \cap F_2}) = [x]_{F_i}$$

è una buona definizione per una mappa da $B/(F_1 \cap F_2)$ verso B/F_i.
Si considerino ora le usuali mappe h_i e m che associano rispettivamente ad un elemento di B la sua classe di equivalenza in B/F_i e in $B/(F_1 \cap F_2)$ e si dimostri che $k_i \circ m = h_i$.
Si supponga infine che F_1 e F_2 siano due ultrafiltri. Dimostrare che

$$U \equiv \{[x]_{F_1 \cap F_2} \mid k_i([x]_{F_1 \cap F_2}) = [1]_{F_i}\}$$

è un ultrafiltro di $B/(F_1 \cap F_2)$.

Soluzione.
Prima di tutti si richiede di dimostrare che $F_1 \cap F_2$ è un filtro. Questo è immediato visto che

- $1 \in F_1 \cap F_2$ visto che $1 \in F_1$ e $1 \in F_2$.
- Inoltre se $x \in F_1 \cap F_2$ e $x \leq y$ allora $y \in F_1$, visto che $x \in F_1$, e $y \in F_2$, visto che $x \in F_2$; quindi $y \in F_1 \cap F_2$.
- Infine, se $x \in F_1 \cap F_2$ e $y \in F_1 \cap F_2$ allora $x, y \in F_1$ e $x, y \in F_2$; quindi $x \wedge y \in F_1$ e $x \wedge y \in F_2$ da cui si deriva che $x \wedge y \in F_1 \cap F_2$.

Vediamo ora che quella di k_i è una buona definizione. Per fare questo basta verificare che se $[x]_{F_1 \cap F_2} = [y]_{F_1 \cap F_2}$ allora $[x]_{F_i} = [y]_{F_i}$. Ma $[x]_{F_1 \cap F_2} = [y]_{F_1 \cap F_2}$ vale se e solo se $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F_1 \cap F_2$ e quest'ultimo implica che $(x \to y) \wedge (y \to x) \in F_i$, visto che $F_1 \cap F_2 \subseteq F_i$, cioè $[x]_{F_i} = [y]_{F_i}$ vale.

Bisogna ora dimostrare che $k_i \circ m = h_i$, cioè che, per ogni $x \in B$, $k_i \circ m(x) = h_i(x)$. Ma, alla luce dei punti precedenti anche questo è immediato, infatti

$$k_i \circ m(x) = k_i(m(x)) = k_i([x]_{F_1 \cap F_2}) = [x]_{F_i} = h_i(x)$$

Infine bisogna verificare che

$$U \equiv \{[x]_{F_1 \cap F_2} \mid k_i([x]_{F_1 \cap F_2}) = [1]_{F_i}\}$$

è un ultrafiltro di $B/(F_1 \cap F_2)$.
Dai punti precedenti e dalla teoria sappiamo che $k_i([x]_{F_1 \cap F_2}) = [1]_{F_i}$ se e solo se $[x]_{F_i} = [1]_{F_i}$ se e solo se $x \in F_i$ e quindi $U \equiv \{[x]_{F_1 \cap F_2} \mid x \in F_i\}$. È allora ovvio che se F_i è un ultrafiltro lo sia anche U.

Esercizio 3
(a) Dimostrare che se $\{\alpha\}$ e $\{\neg\alpha \wedge \beta\}$ non sono soddisfacibili, allora anche $\{\beta\}$ non è soddisfacibile.
(b) Sia Φ un insieme di formule infinito e non soddisfacibile. Dimostrare che ne esiste un sottoinsieme finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ di Φ tale che la formula

$$(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$$

è dimostrabile per ogni formula β.

Soluzione.
Se α non è soddisfacibile non esiste alcuna valutazione che renda α vera. Ne segue che ogni valutazione rende $\neg\alpha$ vera. Consideriamo ora $\neg\alpha \wedge \beta$. Per ipotesi, anche questa formula è non soddisfacibile e quindi ogni valutazione deve valutarla in falso. D'altra parte abbiamo stabilito che ogni valutazione valuta $\neg\alpha$ in vero e quindi ne segue che deve essere β che viene valutato in falso, cioè β risulta essere non soddisfacibile.

Se Φ è un insieme non soddisfacibile, in virtù del teorema di compattezza, deve esistere un suo sottoinsieme finito $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ che è non soddisfacibile, tale cioè che non esiste alcuna valutazione che valuta in vero tutte le formule in $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Ma allora ogni valutazione valuta $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ in falso, visto che valuta in falso almeno una tra le formule $\alpha_1, \ldots,$ α_n, e quindi valuta $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ in vero. Quindi $(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ e' dimostrabile per il teorema di completezza.