Appunti del corso di Logica 1

Alcuni esempi di derivazioni e riduzioni per espressioni di $\Lambda^{\rightarrow}$

a cura di Daniele Cescutti

ANNO ACCADEMICO 2003-2004

1.1 Lambda calcolo tipato semplice : $\Lambda^{\rightarrow}$

Consideriamo un linguaggio formato da una collezione numerabile di *variabili* e di *costanti* linguistiche e da una serie di regole sintattiche alle quali le espressioni, generabili in questo ambito, devono sottostare. Indicheremo con $x, y, z, ...x_1, ..., x_n, ...$ le variabili, con $c, c_1, ..., c_n$ le costanti del linguaggio e con λ e Ap due costanti extra linguistiche che indicano, rispettivamente, l'astrazione e l'applicazione.

Definizione 1 (astrazione) *L'astrazione di una variabile da un'espressione è un'operazione che "astrae" una variabile (vincolandola) da un'espressione, restituendo così un'espressione da applicare.*

Definizione 2 (applicazione) *L'applicazione è un'operazione che "applica" un'espressione, intesa come funzione, ad un altra espressione, intesa come elemento su cui applicare la funzione.*

Richiamiamo il concetto di arietà di un'espressione del linguaggio che stiamo costruendo. L'arietà viene introdotta per operare una distinzione tra le espressioni del linguaggio che si possono applicare ad altre (di arietà opportuna) ed espressioni che non si possono applicare a nessun'altra espressione. L'arietà viene definita induttivamente nel seguente modo:

Definizione 3 .

$$0 : \text{ arietà} \ , \ \frac{\alpha : \text{ arietà} \quad \beta : \text{ arietà}}{(\alpha \rightarrow \beta) : \text{ arietà}}$$

Nota 1 *Dire che un'espressione ha arietà* 0 *equivale a dire che è un'espressione* **non applicabile** *a nessun'altra; essa potrà essere usata solo come argomento per qualche espressione di arietà* $0 \rightarrow \alpha$*, dove* α *è un'arietà.*

Nota 2 *Tutti le espressioni del linguaggio che stiamo definendo, sono formate (o costruite) a partire da costanti e variabili solamente attraverso l'uso delle seguenti regole. Questo ci premetterà di poter decidere se una scrittura (sequenza di segni del linguaggio) sia o no un'espressione del linguaggio*

1.1.1 Espressioni del Lambda calcolo tipato semblice.

1. Regola per le costanti:

$$\frac{c : \alpha \ const}{c : \alpha \ exp} 1$$

2. Regola per le variabili:

$$\frac{x : \alpha \ var}{x : \alpha \ exp} 2$$

3. Regola di applicazione:

$$\frac{b : \alpha \rightarrow \beta \ exp \quad a : \alpha \ exp}{Ap(b, a) : \ \beta \ exp} AP$$

4. Regola di astrazione:

$$\frac{x : \alpha \ var \quad b : \beta \ exp}{\lambda x.b : \alpha \rightarrow \beta \ exp} ASTR$$

L' espressione $\lambda x.b$ si legge "astrazione di x da b".

Notazione 1 *Qualche volta useremo la notazione* $(x)b$ *per indicare* $\lambda x.b$ *(astrazione di* x *da* b*). Questo per accontentare chi preferisce la notazione con le parentesi (introdotta a lezione per evitare di parlare di costanti extralinguistiche cioè esterne al nostro linguaggio). Useremo sempre il simbolo* $x(y)$ *per indicare* $Ap(x, y)$ *(applicazione di* x *a* y*).*

Esempi di derivazioni formali di espressioni di $\Lambda^{\rightarrow}$ Nel linguaggio che abbiamo definito, è possibile stabilire se una scrittura (una sequenza di segni del linguaggio) è un'espressione del linguaggio oppure no. Questo è possibile attreverso un'analisi della scrittura tenendo conto delle regole di formazione delle espressioni del nostro linguaggio. Se, a partire dalla scrittura data, attraverso un ragionamento che tenga conto delle regole, si riesce a giungere ai suoi termini "primitivi" (che compariranno tra i dati del problema o saranno, deducibili dai dati del problema) e se tutte le arietà dei componenti sono compatibili, saremo sicuri che la scrittura di parteza è un'espressione del linguaggio.
Viceversa potrebbe accadere che data un'espressione $e : \alpha\ exp$ di $\Lambda^{\rightarrow}$, di arietà α si chieda di determinare l'arietà dei componenti. Quest'ultimo tipo di esercizi si trova nei compiti svolti dello scorso anno che sono presenti nella pagina web del Prof. Valentini, e qui non li tratteremo.

Esempio 1. Verificare che la scrittura seguente è un'espressione di $\Lambda^{\rightarrow}$: $e \equiv ((x)x(y))((z)f(z))$ nel'ipotesi che $x : 0 \rightarrow 0\ var$, $y : 0\ var$, $f : 0 \rightarrow 0\ var$, $z : 0\ var$.
Soluzione. Una tecnica per risolvere questo esercizio consiste nel considerare la scrittura e data, osservare attraverso quale regola è stata formata, e quindi spezzarla nei suoi eventuali componenti. Nel nostro caso si osserva che e, che coincide con $((x)x(y))((z)f(z))$, è un'applicazione di due espressioni e quindi è stata ottenuta attraverso una esecuzione della regola di applicazione (che a lezione abbiamo chiamato AP). Formalmente si ha:

$$\frac{(x)x(y) :?\ exp? \quad (z)f(z) :?\ exp?}{((x)x(y))((z)f(z)) :?\ exp?} AP$$

I punti di domanda stanno ad indicare che non sappiamo ancora:

- le arietà potenziali (che potranno essere decise a partire da quelle dei componenti dati nel testo del problema),
- se le scritture considerate siano espressioni (lo sapremo alla fine dell'analisi di tutti i sottoespressioni di e.

Cosa abbiamo fatto fino ad ora? Abbiamo "smontato" la scrittura data (potenziale espressione) nei suoi componenti. Adesso non ci resta da fare altro che iterare il procedimento su questi componenti di e fino ad arrivare ai suoi costituenti di base cioè i dati del nostro problema. Dividiamo il problema in due parti: prima consideriamo $(x)x(y)$ e poi $(z)f(z)$.
$(x)(x(y))$ è un'astrazione di x da $x(y)$, quindi è stata ottenuta eseguendo la regola di astrazione (che a lezione abbiamo indicato con ASTR, a partire da $x :?\ var?$ e $x(y) :?\ exp?$. Formalmente

$$\frac{x :?\ var? \quad x(y) :?\ exp?}{(x)x(y) :?\ exp?} ASTR$$

Osserviamo che nelle nostre ipotesi $x : 0 \rightarrow 0\ var$ e quindi possiamo sostituire $0 \rightarrow 0$ al posto del punto di domanda corrispondente e cancellare il punto di domanda dopo var. Possiamo quindi riscrivere la precedente regola nel seguente modo:

$$\dfrac{x : 0 \rightarrow 0 \ var \quad x(y) :?\ exp?}{(x)x(y) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow ?\ exp?}ASTR$$

Quale sotto espressione rimane da decidere? Rimane $x(y)$ che, come si nota subito, è un'applicazione quindi.... si ripete il ragionamento fatto all'inizio. Risulta formalmente:

$$\dfrac{\dfrac{x : 0 \rightarrow 0 \ var}{x : 0 \rightarrow 0 \ exp}2 \quad \dfrac{y : 0 \ var}{y : 0 \ exp}2}{x(y) : 0 \ exp}AP$$

Essendo giunti ai costituenti di base del nostro problema (che si davano come ipotesi), siamo in grado di decidere se $(x)x(y)$, nelle nostre ipotesi, è o no un'espressione verificando la compatibilità delle arietà dei suoi costituenti. Componendo le derivazioni fatte si ottiene:

$$\dfrac{x : 0 \rightarrow 0 \ var \qquad \dfrac{\dfrac{x : 0 \rightarrow 0 \ var}{x : 0 \rightarrow 0 \ exp}2 \quad \dfrac{y : 0 \ var}{y : 0 \ exp}2}{x(y) : 0 \ exp}AP}{(x)x(y) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0 \ exp}ASTR$$

Fin qui abbiamo derivato formalmente $(x)x(y) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0 \ exp$, cioè che $(x)x(y)$ è un espressione del linguaggio $\Lambda^{\rightarrow}$. Ci resta da verificare che anche la scrittura $(z)f(z)$ è un'espressione del linguaggio e che, affinché l'espressione e di partenza sia in $\Lambda^{\rightarrow}$, la sua arietà sia $0 \rightarrow 0$ (così avrebbe senso applicare $(x)x(y) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0 \ exp$ a $(z)f(z)$.

Ragionando come fatto in precedenza, si deriva la seguente

$$\dfrac{z : 0 \ var \qquad \dfrac{\dfrac{f : 0 \rightarrow 0 \ var}{f : 0 \rightarrow 0 \ exp}2 \quad \dfrac{z : 0 \ var}{z : 0 \ exp}2}{f(z) : 0 \ exp}AP}{(z)f(z) : (0 \rightarrow 0) \ exp}ASTR$$

Consiglio vivamente a tutti di fare i passaggi necessari per ottenerla, come fatto per l'espressione $(x)x(y)$. Alla fine risulta che la scrittura di partenza è un'espressione del linguaggio. Formalmente

$$\dfrac{(x)x(y) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0 \ exp \quad (z)f(z) : 0 \rightarrow 0 \ exp}{((x)x(y))((z)f(z)) : 0 \ exp}AP$$

Questo passaggio conclude l'esercizio.

N.B. Nei successivi esempi non si indicheranno più le regole usate nelle derivazioni. Questo impegno è lasciato a voi come utile allenamento nello studio.

Esempio 2. Verificare che la scrittura seguente è un'espressione di $\Lambda^{\rightarrow}$: $(\lambda z.z(a)(b))(\lambda x.\lambda y.x)$, nell'ipotesi che $z : 0 \rightarrow (0 \rightarrow 0) \ var$, $x : 0 \ var$, $y : 0 \ var$, $a : 0 \ exp$, $b : 0 \ exp$.
Soluzione Procediamo come nel precedente esempio. L'unica differenza consiste nell'usare la notazione λ per l'astrazione. Notiamo subito che l'espressione data è un'applicazione di due termini; procediamo dividendo il problema in due sottoproblemi: analizziamo prima la scrittura $\lambda z.z(a)(b)$ e poi $\lambda x.\lambda y.x$.
La scrittura $\lambda z.z(a)(b)$ è un'espressione se è l'astrazione di una variabile z da una espressione $z(a)(b)$. Formalmente:

$$\dfrac{z :?\ var? \quad z(a)(b) :?\ exp?}{\lambda z.z(a)(b) :?\ exp?}$$

Sappiamo dalle nostre ipotesi che $z : 0 \to (0 \to 0)\ var$ e quindi possiamo già avere delle informazioni sull'arietà.

$$(*)\ \dfrac{z : 0 \to (0 \to 0)\ var \quad z(a)(b) :?\ exp?}{\lambda z.z(a)(b) : (0 \to (0 \to 0)) \to ?\ exp?}$$

Consideriamo ora $z(a)(b)$. Questa sarà un'espressione del linguaggio se lo sono $z(a)$ e b; analogamente $z(a)$ è un'espressione del linguaggio se lo sono z e a. Facendo riferimento alle nostre ipotesi, saltando i passaggi intermedi che vi consiglio di fare, si ottiene la seguente derivazione formale

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{z : 0 \to (0 \to 0)\ var}{z : 0 \to (0 \to 0)\ exp} \quad a : 0\ exp}{z(a) : 0 \to 0\ exp} \qquad b : 0\ exp}{z(a)(b) : 0\ exp}$$

Sostituendo nella (*) le arietà determinate ai "?" corrispondenti e cancellando quelli dopo *exp* e *var* si ha

$$\dfrac{z : 0 \to (0 \to 0)\ var \quad z(a)(b) : 0\ exp}{\lambda z.z(a)(b) : (0 \to (0 \to 0)) \to 0\ exp},$$

concludendo la prima parte del problema. Per esercizio si derivi il termine $\lambda x.\lambda y.x$. Risulta $\lambda x.\lambda y.x : 0 \to (0 \to 0)\ exp$, da cui si ha subito che

$$\dfrac{(\lambda z.z(a)(b) : (0 \to (0 \to 0)) \to 0\ exp \quad \lambda x.\lambda y.x : 0 \to (0 \to 0)\ exp}{(\lambda z.z(a)(b))(\lambda x.\lambda y.x) : 0\ exp},$$

concludendo l'esempio-esercizio.

Esempio 3. Tra le espressioni del nostro linguaggio ce ne sono alcune che meritano una particolare attenzione: *le formule*. Una formula del linguaggio *è un'espressione di arietà zero*, è cioè un'espressione che non si applica a nessun'altra. A lezione abbiamo discusso sull'arietà dei *connettivi* ($\& : 0 \to (0 \to 0)$, $\vee : 0 \to (0 \to 0)$, $\neg : 0 \to 0$, $\longrightarrow: 0 \to (0 \to 0)$, $\leftrightarrow: 0 \to (0 \to 0)$), dei *quantificatori* ($\forall : (0 \to 0) \to 0$, $\exists : (0 \to 0) \to 0$) e dei simboli per relazioni, funzioni e operazioni, ($=: 0 \to (0 \to 0)$, $<: 0 \to (0 \to 0)$, $+ : 0 \to (0 \to 0)$, $\bullet : 0 \to (0 \to 0)$, ecc...) e abbiamo visto esempi di formule del I ordine (cioè che quantificano solo su elementi e non su insiemi di elementi) scritti nel linguaggio $\Lambda^{\to}$. Facciamo qui di seguito un altro esempio di questo tipo prendendo, in particolare, la formula logica $\forall x \exists y (2 \cdot x = y)$. Vediamo di costruirne la traduzione nel linguaggio usando, come ipotesi, le arietà dei suoi componenti. Il $\forall$ si applica a espressioni di arietà $0 \to 0$ (cosiddette *funzioni proposizionali*) per tanto sarà applicato ad una astrazione di una variabile di arietà 0, il cui nome è x (la variabile dopo il $\forall$). E così via. Si giunge a

$$\forall((x)\exists((y)(= (\bullet(2)(x))(y)))) \equiv \forall(\lambda x.\exists(\lambda y.(= (\bullet(2)(x))(y))))$$

Le nostre ipotesi sono:

1. $\forall : (0 \to 0) \to 0$ *const*
2. $\exists : (0 \to 0) \to 0$ *const*
3. $=: 0 \to (0 \to 0)$ *const*
4. $\bullet : 0 \to (0 \to 0)$ *const*
5. $2 : 0$ *const*
6. $x : 0\, var$
7. $y : 0$ *var*

Come nei precedenti esempi, possiamo partire dalla scrittura finale, individuare da quale regola essa sia potenzialmente stata formata, spezzarla nei suoi componenti e iterare questo processo per i suoi componenti stessi fino ad arrivare ai costituenti di base (variabili e costanti), che siamo sicuri essere espressioni del linguaggio. Di seguito trovate i pezzi della derivazione che vi consiglio di fare. Partite dall'ultimo pezzo e risalite.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\bullet : 0 \to (0 \to 0)\ const}{\bullet : 0 \to (0 \to 0)\ exp} \quad \dfrac{2 : 0\ const}{2 : 0\ exp}}{\bullet(2) : 0 \to 0\ exp} \qquad \dfrac{x : 0\ var}{x : 0\ exp}}{\bullet(2)(x) : 0\ exp}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{=: 0 \to (0 \to 0)\ const}{=: 0 \to (0 \to 0)\ exp} \quad \bullet(2)(x) : 0\ exp}{= (\bullet(2)(x)) : 0 \to 0} \qquad \dfrac{y : 0\ var}{y : 0\ exp}}{= (\bullet(2)(x))(y) : 0\ exp}$$

$$\dfrac{\dfrac{\exists : (0 \to 0) \to 0\ const}{\exists : (0 \to 0) \to 0\ exp} \quad \dfrac{y : 0\ var \quad = (\bullet(2)(x))(y) : 0\ exp}{(y)(= (\bullet(2)(x))(y)) : 0 \to 0\ exp}}{\exists((y)(= (\bullet(2)(x))(y))) : 0\, exp}$$

$$\dfrac{\dfrac{\forall : (0 \to 0) \to 0\ const}{\forall : (0 \to 0) \to 0\ exp} \quad \dfrac{x : 0\ var \quad \exists((y) = (\bullet(2)(x))(y)) : 0\, exp}{(x)\exists((y)(= (\bullet(2)(x))(y))) : 0 \to 0\ exp}}{\forall((x)\exists((y)(= (\bullet(2)(x))(y)))) : 0\ exp}.$$

Esercizi (proposti).

1. Derivare in modo formale (usando le regole del linguaggio) le seguenti scritture.
   (a) $(\lambda z.z(a)(b))(\lambda x.\lambda y.x)$, con $z : 0 \to ((0 \to 0))$, $x : 0\ var$, $y : 0\ var$, $a : 0\ exp$, $b : 0\ exp$.
   (b) $(\lambda t.t(x)(y))(\lambda x.\lambda y.y(x)) : 0\ exp$, dove $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)$.
   (c) $(\lambda x.t(x)(y))(w(x)(y)) : 0$, dove $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)$, $w : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)$.
   (d) $(\lambda y.y^m(x))(\lambda x.y^n(x))$, dove $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$ e $y^n(x) = \underbrace{y(y \cdots (y(x)))}_{n-volte}$.
   (e) $(\lambda t.\lambda x.\lambda y.t(x)(y))(\lambda x.\lambda y.y(x))$, con $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)\ var$.

(f) $\lambda t.\lambda w.\lambda x.\lambda y.((\lambda x.t(x)(y))(w(x)(x)))$, con $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)\ var$ $w : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)\ var$.

2. Tradurre nel linguaggio $\Lambda^{\to}$, e fare una derivazione formale, delle seguenti formule logiche (cioè espressioni di arietà zero).

   (a) $\forall\, x(x + 1 \neq x)$

   (b) $\forall\, x(x + 0 = x)$

   (c) $\forall\, x(x + 1 \neq 0)$

   (d) $\forall\, x\forall\, y((x + 1 = y + 1) \longrightarrow (x = y))$

   (e) $\forall\, x\forall\, y(x \cdot (y + 1) = x + x \cdot y)$

   (f) $\forall\, x\exists\, y(x + y = 0)$

1.1.2 Regole di sostituzione per le espressioni.

Definizione 4 *Sia t una λ-espressione. Diremo che la variabile x : var compare* libera *in t compare in t e se non è astratta. In caso contrario x : var si dirà vincolata. L'insieme delle variabili libere di t, denotato con $\mathbb{FV}(t)$, si definisce induttivamente nel seguente modo:*

- *Se* $t \equiv c :\ const \Rightarrow \mathbb{FV}(c) \equiv \{\emptyset\}$.
- *Se* $t \equiv x :\ var \Rightarrow \mathbb{FV}(x) \equiv \{x\}$.
- *Se* $t \equiv b(a) \Rightarrow \mathbb{FV}(b(a)) \equiv \mathbb{FV}(b) \cup \mathbb{FV}(a)$
- *Se* $t \equiv \lambda x.d \Rightarrow \mathbb{FV}(\lambda x.d) \equiv \mathbb{FV}(d) \setminus \{x\}$

Definizione 5 *Siano x una variabile, b ed e λ-espressioni. La sostituzione nell' espressione b della variabile x con l' espressione e (della stessa arietà di x), in simboli $b[x := e]$, si definisce induttivamente sulla complessità della struttura dell'espressione b come segue :*

- *Se b è una variabile allora* $b[x := e] \equiv \begin{cases} e \ \ se\ \ b \equiv x \\ b\ \ altrimenti. \end{cases}$
- *Se b è una applicazione, cioè $b \equiv c(a)$, allora* $c(a)[x := e] \equiv c[x := e](a[x := e])$
- *Se b è un'astrazione, cioè $b \equiv \lambda z.c$, allora*

$$(\lambda z.c)[x := e] \equiv \begin{cases} (\lambda x.c) & se\ \ z \equiv x \\ (\lambda z.c[x := e]) & se\ \ z \not\equiv x,\ \ z \notin \mathbb{FV}(e) \\ (\lambda t.c[z := t][x := e]) & z \not\equiv x,\ \ z \in \mathbb{FV}(e) \\ & \text{t è una nuova variabile} \\ & \text{della stessa arietà di } z. \end{cases}$$

1.1.3 Regole di uguaglianza

- (const-uguaglianza) $c = c$
- (var-uguaglianza) $x = x$
- (app-uguaglianza) $\dfrac{b_1 = b_2 : \alpha \rightarrow \beta\ exp \quad a_1 = a_2 : \alpha\ exp}{b_1(a_1) = b_2(a_2) : \beta\ exp}$
- (ξ-uguaglianza) $\dfrac{b = d : \beta\ exp \quad x : \alpha\ var}{(\lambda x.b) = (\lambda x.d) : \alpha \rightarrow \beta\ exp}$
- (α-uguaglianza) $\dfrac{b : \beta\ exp \quad x : \alpha\ var \quad y : \alpha\ var}{(\lambda x.b) = (\lambda y.b[x := y]) : \alpha \rightarrow \beta\ exp}$ se $y \notin \mathbb{FV}(b)$.
- (β-uguaglianza) $\dfrac{b : \beta\ exp \quad a : \alpha\ exp \quad x : \alpha\ var}{(\lambda x.b)(a) = b[x := a] : \beta\ exp}$ oppure $\dfrac{\lambda x.b : \alpha \rightarrow \beta\ exp \quad a : \alpha\ exp}{(\lambda x.b)(a) = b[x := a] : \beta\ exp}$
- (η-uguaglianza) $\dfrac{b : \alpha \rightarrow \beta\ exp \quad x : \alpha\ var}{\lambda x.b(x) = b : \alpha \rightarrow \beta\ exp}$ se $x \notin \mathbb{FV}(b)$.

1.1.4 Forma normale.

Cerchiamo di dare l'idea di forma normale di un espressione del linguaggio $\Lambda^{\rightarrow}$. Il concetto di *forma normale* di un'espressione $t : \alpha$ del linguaggio, vuole indicare un'espressione $u : \alpha$ che sia equivalente a t ma che sia il più semplice possibile (nel senso di meno complesso). Ovviamente se t è già un'espressione non ulteriormente semplificabile, vorrà dire che è già in forma normale. Vediamo di formalizzare questa idea. Innanzitutto occorre ricordare le regole che ci assicurano quando un'espressione è uguale ad un altra e, tra queste, considerare quella che opera una semplificazione sulla complessità dell'espressione. Un'analisi delle regole di uguaglianza del precedente paragrafo che verifichino le nostre richieste danno un unico risultato: la β-uguaglianza.

N. B.

Nelle dispense la regola di β - uguaglianza è presentata nel seguente modo:

$$\frac{b : \beta\ exp \quad a : \alpha\ exp \quad x : \alpha\ var}{(\lambda x.b)(a) = b[x := a] : \beta\ exp.}$$

Nella presentazione che ho dato io durante le esercitazioni, ho usato il seguente modo:

$$\frac{(\lambda x.b) : \alpha \rightarrow \beta\ exp \quad a : \alpha\ exp}{(\lambda x.b)(a) = b[x := a] : \beta\ exp}$$

Le due versioni della regola sono equivalenti.

Definizione 6 *Data una espressione non in forma normale (cioè che contiene sottoespressioni del tipo $(\lambda x.b)(a)$), il processo di calcolo che valuta l'espressione $(\lambda x.b)(a)$ nell'espressione $b[x := a]$ si chiama β - riduzione e sará indicato nel seguente modo:*

$$(\lambda x.b)(a) \Rightarrow_\beta b[x := a].$$

Questo processo di calcolo si basa sulla regola di β - uguaglianza nel senso che esso trova una sua giustificazione nella regola (di β - uguaglianza). Per tanto le due cose, per quanto siano strettamente connesse, vanno distinte. In ogni caso, dire che $\lambda x.b)(a) \Rightarrow_\beta b[x := a]$, vuol dire che da qualche parte si è derivato che $(\lambda x.b)(a) = b[x := a]$.

N.B.
In esercizi nei quali si chiede di ridurre un termine, si potrà utilizzare indifferentemente la β - riduzione o la β - uguaglianza.
Diamo quindi la seguente definizione:

Definizione 7 *Data un'espressione $t \in \Lambda^{\rightarrow}$, diremo che t è in* forma normale *se nessuno delle sue sotto espressioni è della forma $(\lambda x.b)(a)$. Equivalentemente, una λ-espressione si dice in* forma normale *se nessuna β - riduzione può esere applicata a una sua sottoespressione qualsiasi.*

La seguente definizione ci dice cosa sia una sottoespressione di un'espressione.

Definizione 8 *Date due λ-espressioni t e u, diremo che t è* sottoespressione *di u se $t \in Sub(u)$, ove $Sub(u)$ è l'insieme definito induttivamente nel seguente modo:*

1. $Sub(x) \equiv \{x\}$
2. $Sub(\lambda x.v) \equiv Sub(v) \cup \{\lambda x.v\}$
3. $Sub(Ap(m,n)) \equiv Sub(m) \cup Sub(n) \cup \{Ap(m,n)\}$

Esempio 1.
Espressioni del tipo $\lambda x.\lambda y.x$, con $x : var$, $y : var$ sono esempi di espressioni in forma normale.

Esempio 2.
L'espressione $(\lambda x.x(y))(\lambda z.z) : 0\ exp$, dove $x : 0 \rightarrow 0\ var$, $y : 0\ var$, $z : 0\ var$, non è chiaramente in forma normale in quanto ad essa può essere applicata la regola di β-uguaglianza. Infatti si ha:

$$\frac{\lambda x.x(y) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0\ exp \quad \lambda z.z : 0 \rightarrow 0\ exp}{(\lambda x.x(y))(\lambda z.z) = x(y)[x := \lambda z.z] : 0\ exp}\beta$$

Per le regole di sostituzione abbiamo che $x(y)[x := \lambda z.z] \equiv (\lambda z.z)(y)$, alla quale è possibile applicare una ulteriore β - riduzione e e cioè:

$$(\lambda z.z)(y) \Rightarrow_{\beta} z[z := y] \equiv y$$

Esempio 3.
Ridurre in forma normale l'espressione $e \equiv (\lambda x.x(y))(\lambda z.f(z)) : 0\ exp$, dove $x : 0 \rightarrow 0\ var$, $y, z : 0\ var$, $f : 0 \rightarrow 0\ var$.
Soluzione. L'espressione e non è in forma normale visto che è possibile eseguire almeno una volta la regola di β - uguaglianza. Applicando la regola si ha:

$$\frac{\lambda x.x(y) : (0 \rightarrow 0) \rightarrow 0\ exp \qquad \lambda z.f(z) : 0 \rightarrow 0\ exp}{(\lambda x.x(y))(\lambda z.f(z)) = x(y)[x := \lambda z.f(z)] : 0\ exp}\beta$$

Per le regole di sostituzione $x(y)[x := \lambda z.f(z)] \equiv (\lambda z.f(z))(y)$ che non è in forma normale. Applichiamo un'ulteriore β- uguaglianza:

$$\frac{\lambda z.f(z) : 0 \rightarrow 0\ exp \qquad y : 0\ exp}{(\lambda z.f(z))(y) = f(z)[z := y] : 0\ exp}\beta$$

Per le regole di sostituzione abbiamo che $f(z)[z := y] \equiv f(y)$. Giunti a questo punto non potendo più applicare β - riduzioni all'espressione $f(y)$ (visto che f e x sono due variabili), avendo determinato che $e = f(y)$, e quindi $\mathrm{nf}(e) = \mathrm{nf}(f(y))$, per l'algoritmo visto a lezione abbiamo che $\mathrm{nf}(e) = f(\mathrm{nf}(y)) = f(y)$.

Esempio 4.
Ridurre in forma normale l'espressione $e \equiv (\lambda z.z(a)(b))(\lambda x.\lambda y.x) : \alpha\ exp$, dove $x : \alpha \to \alpha\ var$, $y, z : \alpha \to (\alpha \to \alpha) : var$, $y : \alpha\ var$, $a : \alpha\ exp$, $b : \beta\ exp$ e $\mathbb{FV}(a) = \mathbb{FV}(b) = \emptyset$.
Soluzione.
Abbiamo giè verificato in nell'esempio 2 a pag. 3 che le espressioni $\lambda z.z(a)(b)$ e $\lambda x.\lambda y.x$ sono espressioni di $\Lambda^{\rightarrow}$ nelle nostre ipotesi (artietà dei componenti e natura degli stessi). Possiamo quindi procedere ad eventuali riduzioni per trovare la forma normale dell'espressione data. L'espressione e è un'applicazione, quindi l'avrò ottenuta attraverso l'esecuzione della regola AP. cioè.

$$\frac{\lambda z.z(a)(b) : (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to \alpha\ exp \quad \lambda x.\lambda y.x : \alpha \to (\alpha \to \alpha)\ exp}{(\lambda z.z(a)(b))(\lambda x.\lambda y.x) : \alpha\ exp} AP$$

Usando le stesse ipotesi della regola appena eseguita, possiamo far eseguire la β - uguaglianza che ci permette di trovare un'espressione equivalente ad e ma meno complessa di e stessa.

$$\frac{\lambda z.z(a)(b) : (\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to \alpha\ exp \quad \lambda x.\lambda y.x : \alpha \to (\alpha \to \alpha)\ exp}{(\lambda z.z(a)(b))(\lambda x.\lambda y.x) = z(a)(b)[z := \lambda x.\lambda y.x] : \alpha\ exp} \beta$$

Per le regole di sostituzione in una applicazione abbiamo che

$$z(a)(b)[z := \lambda x.\lambda y.x] \equiv z[z := \lambda x.\lambda y.x](a[z := \lambda x.\lambda y.x])(b[z := \lambda x.\lambda y.x]) \equiv$$

$\equiv (\lambda x.\lambda y.x)(a)(b)$ poiché $\mathbb{FV}(a) = \mathbb{FV}(b) = \emptyset$. Questa espressione è in forma normale? NO! Infatti è possibile applicare ad esso almeno una β-riduzione. Saltando qualche passaggio

$$(\lambda x.\lambda y.x)(a)(b) \Rightarrow_\beta \lambda y.x[x := a](b) \equiv (\lambda y.a)(b) \Rightarrow_\beta a[y := b] \equiv a.$$

Fin qui abbiamo eseguito tutte le possibili β-riduzioni. Abbiamo determinato che $e = a$ e quindi che $\mathrm{nf}(e) = \mathrm{nf}(a)$.

Notazione 2 *Di seguito useremo $\lambda x.(t(x))$ sarà indicato spesso con $\lambda x.t(x)$ per brevità.*

Esercizi (proposti).
Ridurre in forma normale le seguenti espressioni di $\Lambda^{\rightarrow}$ e indicare quali sono le variabili libere in ogni espressione:

1. $(\lambda z.z(a)(b))(\lambda x.\lambda y.x)$, con $z : 0 \to (0 \to 0)$, $x : 0\ var$, $y : 0\ var$, $a : 0\ exp$, $b : 0\ exp$ e $\mathbb{FV}(a) = \mathbb{FV}(b) = \emptyset$.
2. $(\lambda t.t(x)(y))(\lambda x.\lambda y.y(x)) : 0\ exp$, dove $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)$.
3. $(\lambda x.t(x)(y))(w(x)(y)) : 0$, dove $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to (0 \to 0) \to 0$, $w : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)$.
4. $(\lambda y.y^m(x))(\lambda x.y^n(x))$, dove $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$ e $y^n(x) = \underbrace{y(y \cdots (y(x)))}_{n-volte}$.
5. $(\lambda t.\lambda x.\lambda y.t(x)(y))(\lambda x.\lambda y.y(x))$, con $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)\ var$.
6. $\lambda t.\lambda w.\lambda x.\lambda y.((\lambda x.t(x)(y))(w(x)(y)))$, con $x : 0\ var$, $y : 0 \to 0\ var$, $t : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)\ var$ $w : 0 \to ((0 \to 0) \to 0)\ var$.