Introduzione agli insiemi

Silvio Valentini
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova
via G. Belzoni n.7, I–35131 Padova, Italy
silvio@math.unipd.it

March 9, 2003

Contents

1 Premessa

L'operazione mentale di pensare insieme, come un'unica entità, più cose é tra le più naturali e si riflette infatti costantemente nel linguaggio naturale: chiamiamo gregge, un unico concetto, una collezione di pecore, chiamiamo classe una collezione di studenti e chiamiamo squadra una collezione di giocatori.

Questa operazione é forse la più semplice tra le operazioni di astrazione che si possono operare sulla realtà. La sua utilità é evidente in quanto rende possibile ridurre la complessità di un mondo in cui il numero di oggetti in gioco cresce facilmente al di là delle nostre possibilità di controllo: ad esempio le classi di una scuola possono essere una ventina il numero degli studenti può essere di cinquecento e, per chi deve fare l'orario delle lezioni, é ben diverso pensare di organizzare venti oggetti piuttosto che cinquecento.

Naturalmente il pensare assieme le cose non é una operazione che viene effettuata in modo completamente casuale ma piuttosto secondo certi criteri che, di volta in volta, possono essere i più diversi: gli studenti di una scuola possono essere raggruppati in classi in relazione alla loro età, ma possono anche essere divisi in due grandi gruppi a seconda del loro sesso. In entrambi i casi i gruppi vengono formati seguendo un certo concetto.

In matematica un simile approccio ha avuto un tale successo che buona parte della matematica si é potuta ridurre alla sola nozione di collezione e di operazioni che forniscono nuove collezioni a partire da altre collezioni. Nei prossimi paragrafi cominceremo appunto a vedere come tale riduzione possa essere effettuata. Tuttavia prima ancora di cominciare con questo programma di lavoro conviene vedere fino a che punto l'operazione di costruire delle collezioni si possa effettuare in modo sicuro ed esente da paradossi, almeno nel caso in cui si voglia parlare di oggetti matematici. Vogliamo perciò analizzare in modo astratto l'idea del *mettere le cose insieme*: con un facile gioco di parole potremo dire che vogliamo analizzare il *concetto di concetto*.

2 Il concetto di concetto

Per partire con la nostra analisi, la prima idea che viene in mente, ispirata dalla vita di tutti i giorni, é quella di confondere un concetto con una proprietà: il concetto di gregge é basato sulla proprietà di essere una pecora appartenente ad un certo pastore, quello di classe scolastica sulla proprietà di avere la stessa età, quello di numero naturale pari sulla proprietà di essere divisibile per 2. L'idea sembra quindi buona. Tanto per cominciare, senza dubbio ogni collezione finita, che possiamo indicare con $\{a_1, \ldots, a_n\}$ se essa é formata dagli elementi a_1, $\ldots a_n$, può essere comunque descritta tramite la proprietà di "essere uno dei suoi elementi uguale ad a_1 oppure di essere uguale ad a_2 oppure ... oppure di essere uguale ad a_n" (notazione $\{x \mid x = a_1 \text{ o } \ldots \text{ o } x = a_n\}$ che si legge "la collezione degli elementi x tali che $x = a_1$ o ... o $x = a_n$). Inoltre l'idea funziona bene anche per indicare collezioni che contengono un numero non finito di elementi: in questo caso infatti la notazione precedente, vale a dire $\{a_1, \ldots, a_n\}$, non può proprio funzionare e passare attraverso la descrizione tramite una proprietà sembra essere l'unica strada percorribile. In questo modo possiamo ad esempio indicare la collezione dei numeri pari tramite la notazione $\{x \mid x \text{ si divide per } 2\}$ o la collezione dei numeri primi positivi con la notazione $\{x \mid \text{gli unici divisori interi di } x \text{ sono } 1 \text{ e } x \text{ stesso}\}$.

Bisogna tuttavia notare che rendere una collezione di oggetti un unico ente la rende un possibile soggetto di proprietà: ad esempio potrò dire "il gregge é del pastore Silvio" o "la collezione dei numeri pari contiene un numero non finito di elementi". É quindi possibile che il confondere un concetto con una proprietà possa portare a qualche situazione paradossale. Il primo esempio di tali paradossi si deve a Bertrand Russell. Egli si é posto il problema di analizzare la collezione R i cui elementi sono le collezioni che non sono elementi di se stesse. Osserviamo prima di tutto che se le collezioni possono essere soggetto di una proprietà la frase "le collezioni che non sono elementi di se stesse" é dotata di significato. Ora, é facile riconoscere che, ad esempio, la collezione di tutti i gatti é un elemento di R, poichè essa é un concetto e non é perciò certamente un gatto. D'altra parte la collezione di tutte le collezioni con un numero non finito di elementi non é un elemento di R, poichè essa é un elemento di se stessa; infatti tale collezione ha sicuramente un numero non finito di elementi distinti: ad esempio, essa contiene la collezione dei numeri naturali, quella dei numeri naturali escluso il numero 1, quella dei numeri naturali escluso il numero 2 e così via. Sorge ora, abbastanza naturale, il problema di scoprire se R é oppure no un elemento di se stesso. Ma questo ci conduce direttamente ad una situazione paradossale: se R fosse un elemento di R allora, visto che R é costituito esattamente dalle collezioni che non sono elemento di se stesse, dedurremmo che R non é un elemento di se stesso; d'altra parte se R non é un elemento di se stesso per la definizione stessa di R ci troveremo forzati ad ammettere che R deve essere un elemento di se stesso. Trascrivendo le considerazioni precedenti in simboli utilizzando la notazione $X \in Y$ per indicare che X é un elemento di Y, abbiamo

$$R \in R \text{ se e solo se } R \in \{X \mid X \notin X\} \text{ se e solo se } R \notin R$$

Poichè non sono previste altre possibilità, vale a dire che o R é un elemento della collezione R o non lo é, ci troviamo in un paradosso senza via d'uscita.

3 Insiemi

Il paradosso di Russell che abbiamo visto alla fine della sezione precedente ci obbliga a riflettere sul tipo di collezioni che potranno esserci utilizzate per fare matematica visto che é chiaro che pensare di ammettere tutte le possibili collezioni é una strada troppo pericolosa. Tuttavia analizzando la struttura del paradosso possiamo cercare di capire quali collezioni possiamo ammettere senza correre troppi rischi. Il paradosso sembra nascere da una situazione di autoriferimento in quanto la collezione R é fatta con collezioni tra le quali R stessa può trovarsi. Una via per sfuggire al paradosso é allora quella di abbandonare l'idea di usare tutte le collezioni e di limitarsi ad usare solo quelle formate da elementi che sono giá stati riconosciuti come collezioni “sicure”. Diremo che se seguiamo questo approccio accetteremo per le collezioni il principio di *buona fondatezza*.

Per evitare di fare confusione, d'ora in avanti chiameremo collezione il risultato di una qualunque operazione mentale consistente nel pensare alle cose assieme (e per le collezioni accetteremo i rischi connessi!) mentre riserveremo il nome di *insieme* per quelle particolari collezioni che possono essere soggetto di proprietà senza dare luogo a paradossi. Naturalmente la nostra speranza é che la collezione degli insiemi si riesca a descrivere per bene! Notate, tanto per cominciare, che il principio di buona fondatezza richiede che la collezione di tutti gli insiemi non sia un insieme (perchè?).

3.1 Gli assiomi di base

Se vogliamo seguire il principio di buona fondatezza ci ritroviamo all'inizio a non possedere alcun insieme per cui l'unico insieme che possiamo costruire é quello che non ha nessun elemento (si ricordi che le uniche collezioni che ammettiamo come elementi di un insieme sono quelle che sono già state riconosciute come insiemi). Cominciamo perciò con il seguente assioma.

Definizione 3.1 (Assioma dell'insieme vuoto) *La collezione che non contiene alcun elemento é un insieme che chiameremo* insieme vuoto *e indicheremo con* $\emptyset$.

Non é difficile rendersi conto che usando solo l'insieme vuoto di matematica se ne fa veramente poca, per cui é bene cercare di costruire nuovi insiemi. Iniziamo dunque introducendo un po' di notazioni che ci saranno utili nel seguito della trattazione.

La più importante relazione tra insiemi é naturalmente la *relazione di appartenenza*, indicata con $X \in Y$, cui abbiamo già accennato nella sezione precedente. La useremo per indicare che X é un elemento dell'insieme Y. La sua negazione verrà denotata con $X \notin Y$ e verrà usata per indicare che l'elemento X non appartiene all'insieme Y. Ad essa segue per importanza la *relazione di sottoinsieme* che può essere definita utilizzando la relazione di appartenenza.

Definizione 3.2 (Sottoinsieme) *Siano X e Y due insiemi. Scriveremo allora $X \subseteq Y$ come abbreviazione per dire che, per ogni insieme z, se $z \in X$ allora $z \in Y$.*

É interessante notare che se X é un insieme e Y é una collezione i cui elementi appartengono tutti a X allora il principio di buona fondatezza ci spinge a considerare anche Y come un insieme.

Definizione 3.3 (Assioma del sottoinsieme) *Sia X un insieme e Y una collezione tale che per ogni elemento di Y é anche un elemento di X. Allora Y é un insieme.*

Visto che tutto quello che ci interessa analizzare degli insiemi sono i loro elementi non é difficile accordarsi su fatto che possiamo considerare uguali due insiemi se questi hanno esattamente gli stessi elementi.

Definizione 3.4 (Estensionalità) *Siano X ed Y due insiemi. Diremo allora che X é uguale a Y se e solo se X e Y hanno gli stessi elementi.*

Usando la definizione di sottoinsieme é immediato verificare che l'insieme X é uguale all'insieme Y se e solo se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Possiamo ora tornare alla situazione cui eravamo arrivati prima delle disavventure dovute al paradosso di Russell per vedere come si può, almeno in parte, recuperare l'idea di definire un insieme tramite una proprietà pur rispettando il principio di buona fondatezza. Come abbiamo detto l'idea che ci deve guidare é che possono essere elementi di un insieme solo quelle collezioni che abbiamo già riconosciuto come insiemi. Questo ci porta immediatamente al seguente assioma.

Definizione 3.5 (Assioma di separazione) *La collezione di tutti gli elementi* $x \in X$ *soddisfacenti la proprietà* $P(-)$ *é un insieme che indicheremo con* $\{x \in X |\ P(x)\}$.

Infatti, la collezione $\{x \in X |\ P(x)\}$, essendo composta solamente di elementi di un insieme, e quindi già riconosciuti come insiemi, é una collezione che il principio di buona fondatezza ci assicura essere "non pericolosa".

Possiamo immediatamente utilizzare l'assioma di *separazione* per definire una prima operazione tra insiemi.

Definizione 3.6 (Intersezione binaria di insiemi) *Siano* X *e* Y *due insiemi. Diremo* intersezione *tra l'insieme* X *e l'insieme* Y *l'insieme così definito*

$$X \cap Y \equiv \{x \in X |\ x \in Y\}$$

É ovvio che se X e Y sono due insiemi allora, come conseguenza dell'assioma di *separazione* anche $X \cap Y$ é un insieme.

Tuttavia, l'assioma di separazione ci permette di ottenere solamente insiemi che sono sottoinsiemi di altri insiemi e avendo noi, per ora, a disposizione solo l'insieme vuoto tutto ciò che possiamo ottenere é solo l'insieme vuoto. Introduciamo quindi il più semplice dei modi per costruire nuovi insiemi.

Definizione 3.7 (Assioma della coppia) *Siano* X *e* Y *due insiemi. Allora la collezione i cui elementi sono gli insiemi* X *e* Y *é un insieme che indicheremo con* $\{X, Y\}$.

Il principio di buona fondatezza ci assicura che questo assioma non é pericoloso e possiamo quindi usarlo per produrre nuovi insiemi. Tramite l'assioma della coppia possiamo produrre insiemi con uno (perchè?) o due elementi quale ad esempio $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Tuttavia, se il nostro scopo é quello di rifare la matematica usando solo gli insiemi, conviene sforzarci un po' per ottenere almeno insiemi con un numero qualsiasi di elementi (vorremmo pur ottenere i numeri naturali!). Introduciamo quindi il seguente assioma.

Definizione 3.8 (Assioma dell'unione binaria) *Se* X *e* Y *sono due insiemi allora la collezione i cui elementi sono elementi di* X *o elementi di* Y *é un insieme che indicheremo con* $X \cup Y$.

Per giustificare il fatto che l'assioma dell'unione binaria ci permette di definire un insieme " sicuro " dobbiamo di nuovo rifarci al principio di buona fondatezza (perchè?).

Usando l'assioma dell'unione é possibile finalmente costruire insiemi con un numero qualsiasi, purchè finito, di elementi.

3.2 I numeri naturali

Naturalmente gli insiemi finiti non sono sufficienti per fare la matematica. Il prossimo passo é quindi quello di definire una collezione i cui elementi siano una ragionevole ricostruzione dei numeri naturali: l'idea di fondo é che dobbiamo costruire, per ogni numero naturale n, un insieme che abbia esattamente n elementi. Sappiamo quindi subito come partire, visto che di insiemi con 0 elementi ce n'é uno solo:

$$0 \equiv \emptyset$$

Il prossimo passo é quello di capire come trovare un insieme che abbia un unico elemento; anche questo é facile e il problema é piuttosto quello di scegliere un insieme particolare tra tutti gli infiniti insiemi con un unico elemento. Una scelta standard che risulterà vantaggiosa é la seguente:

$$1 \equiv \{\emptyset\}$$

cioé $1 \equiv \{0\}$.

A questo punto abbiamo già costruito due insiemi diversi e quindi ottenere un insieme che rappresenti il numero 2 é facile:

$$2 \equiv \{0, 1\}$$

che ci dà anche l'idea generale su come procedere:

$$n \equiv \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Possiamo esprimere questa definizione di infiniti oggetti in modo più compatto tramite una definizione induttiva dei numeri naturali:

$$\begin{array}{ll} \text{(Base)} & 0 \equiv \emptyset \\ \text{(Step)} & n+1 \equiv n \cup \{n\} \end{array}$$

che ci dice come partire (base) e come ottenere un nuovo elemento, il successivo numero naturale, a partire da un elemento già costruito (step).

Definizione 3.9 (Assioma dei numeri naturali) *La collezione i cui elementi sono gli insiemi costruiti tramite la precedente definizione induttiva é un insieme che indicheremo con ω.*

Anche in questo caso il principio di buona fondatezza ci assicura che questa collezione non é pericolosa perchè costituita solamente con elementi che sono insiemi, ma l'averla riconosciuta come insieme é un grande passo avanti: possediamo infatti il nostro primo insieme infinito! Vale la pena di sottolineare che questa definizione dei numeri naturali si fonda pesantemente sull'intuizione che già si possiede dei numeri naturali; non sarebbe infatti possibile, in mancanza di questa intuizione, afferrare l'idea fondamentale che sostiene che la definizione induttiva dei numeri naturali produce ad ogni passo un nuovo insieme ma soprattutto che il processo di produzione di nuovi insiemi é discreto (cioè ha senso parlare di "step") e non ha termine.

La definizione induttiva dei numeri naturali ci mette immediatamente a disposizione una potente tecnica per dimostrare proprietà dei numeri naturali. Basta infatti notare che ogni numero naturale é raggiungibile, a partire dallo 0, applicando un numero sufficiente di volte l'operazione di "passare al successivo" per rendersi conto che ogni proprietà che vale per lo 0 e che vale per $n + 1$ qualora valga per n deve inevitabilmente valere per tutti i numeri naturali.

Definizione 3.10 (Principio di induzione) *Sia $P(-)$ una proprietà sui numeri naturali. Allora, se vale $P(0)$ e, per ogni numero naturale n, $P(n)$ implica $P(n + 1)$ allora P vale per ogni numero naturale.*

Vedremo più avanti alcune applicazioni del principio di induzione.

Prima di concludere questo capitolo, visto che adesso possediamo insiemi con infiniti elementi, é utile rafforzare l'assioma dell'unione binaria a questa nuova situazione.

Definizione 3.11 (Assioma dell'unione arbitraria) *Sia I un insieme di insiemi. Allora la collezione i cui elementi sono gli elementi di un qualche $X \in I$ é un insieme che indicheremo con $\bigcup_{X \in I} X$.*

É facile rendersi conto che l'assioma dell'unione binaria altro non é che un'istanza di questo assioma nel caso in cui l'insieme I abbia due elementi. Possiamo giustificare questo nuovo assioma facendo appello al principio di buona fondatezza visto che anche in questo caso gli elementi della collezione $\bigcup_{X \in I} X$ sono già stati riconosciuti come elementi di un qualche insieme.

3.3 Relazioni

Adesso che abbiamo ricostruito i numeri naturali all'interno di un ambiente insiemistico il prossimo passo é recuperare il concetto di funzione. Il primo passo per ottenere tale definizione é quello di formalizzare il concetto di relazione all'interno della teoria degli insiemi.

Definizione 3.12 (Coppia ordinata) *Siano X e Y due insiemi. Diremo* coppia ordinata *di X e Y l'insieme $\langle X, Y \rangle \equiv \{X, \{X, Y\}\}$.*

Si verifica immediatamente che, per ogni coppia di insiemi X e Y, la collezione $\langle X, Y \rangle$ é un insieme.

Tramite la definizione di coppia ordinata abbiamo voluto introdurre un meccanismo che ci permetta di distinguere il primo e il secondo elemento all'interno di una coppia di elementi; infatti l'*estensionalità* ci costringe a riconoscere come uguali i due insiemi $\{X, Y\}$ e $\{Y, X\}$ e quindi se vogliamo distinguere un primo elemento nella coppia dobbiamo, in qualche modo, dichiararlo tale. Questo é esattamente ciò che si ottiene tramite la definizione di coppia ordinata; infatti, si specifica appunto che, nella coppia ordinata $\langle X, Y \rangle$, X é il primo elemento di una coppia di elementi costituita da $\{X, Y\}$.

Dal punto di visto tecnico, lo scopo della definizione é quello di poter dimostrare che $\langle X_1, Y_1 \rangle = \langle X_2, Y_2 \rangle$ se e solo se $X_1 = X_2$ e $Y_1 = Y_2$ (vedi esercizi).

Ora, una relazione tra gli elementi dei due insiemi X e Y può essere specificata dicendo quali elementi dell'insieme X sono in relazione con quali elementi dell'insieme Y. Possiamo esprimere questa situazione all'interno della teoria degli insiemi dicendo che una relazione si identifica con la collezione delle coppie ordinate $\langle x, y \rangle$ il cui primo elemento $x \in X$ é in relazione con il secondo elemento $y \in Y$. Come primo passo, questo ci spinge verso la seguente definizione.

Definizione 3.13 (Assioma del prodotto cartesiano) *Siano X e Y due insiemi. Allora la collezione i cui elementi sono coppie ordinate il cui primo elemento sta in X e il cui secondo elemento sta in Y é un insieme che chiameremo* prodotto cartesiano *di X e Y e indicheremo con $X \times Y$.*

Come al solito possiamo fare ricorso al principio di buona fondatezza per assicurarci della non pericolosità di questa definizione.

É ora evidente che ogni relazione R tra due insiemi X e Y é un sottoinsieme di $X \times Y$ e quindi é a sua volta un insieme.

Esiste per le relazioni tutto un catalogo di nomi in funzione delle particolari proprietà cui una relazione può soddisfare. Ad esempio, dato un insieme X, una relazione $R \subseteq X \times X$ si dice

- (riflessiva) se, per ogni $x \in X$, $\langle x, x \rangle \in R$;
- (transitiva) se, per ogni $x, y, z \in X$, se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, z \rangle \in R$ allora $\langle x, z \rangle \in R$;
- (simmetrica) se, per ogni $x, y \in X$, se $\langle x, y \rangle \in R$ allora $\langle y, x \rangle \in R$;
- (antisimmetrica) se, per ogni $x, y \in X$, se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, x \rangle \in R$ allora $x = y$;
- (tricotomica) se, per ogni $x, y \in X$, $\langle x, y \rangle \in R$ o $\langle y, x \rangle \in R$ o $x = y$;
- (preordine) se R é *riflessiva* e *transitiva*;
- (di equivalenza) se R é *riflessiva*, *transitiva* e *simmetrica*;
- (ordine parziale) se R é *riflessiva*, *transitiva* e *antisimmetrica*;
- (ordine totale) se R é un *ordine parziale tricotomico*

Le relazioni di equivalenza saranno particolarmente rilevanti negli sviluppi futuri. Una relazione di equivalenza gode infatti delle tre principali proprietà che uno si aspetta dalla relazione Id_X di identità tra elementi dell'insieme X, vale a dire la relazione tra gli elementi di un insieme X definita dall'insieme di coppie i cui elementi sono identici:

$$\mathsf{Id}_X \equiv \{\langle x, x \rangle \mid x \in X\}$$

É infatti immediato verificare che la relazione Id_X é in realtà una relazione di equivalenza, vale a dire é una relazione *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*, ma la cosa più interessante é il fatto che queste proprietà sono caratteristiche di una relazione di identità nel senso che data una qualsiasi relazione di equivalenza noi possiamo sempre costruire un opportuno insieme su cui tale relazione di equivalenza permette di definire una relazione di identità.

Per mostrare questo risultato introduciamo prima la nozione di *partizione* di un insieme.

Definizione 3.14 (Partizione) *Sia X un insieme. Allora una partizione su X é un insieme I di sottoinsiemi di X tali che*

- *per ogni $Y \in I$, $Y \neq \emptyset$*
- $X = \bigcup_{Y \in I} Y$
- *se Y e Z sono due elementi di I allora se $Y \neq Z$ allora $Y \cap Z = \emptyset$*

Intuitivamente, una partizione di un insieme X é quindi una maniera di dividere X in pezzi separati non vuoti. Infatti la terza condizione sostiene che o due pezzi sono uguali o sono disgiunti. Per di più, dato un qualsiasi elemento $x \in X$, in virtù della seconda e della terza condizione, possiamo sempre individuare quell'unico elemento $Y_x \in I$ tale che $x \in Y_x$.

Ora é immediato verificare che una partizione I su un insieme X determina sempre una relazione di equivalenza R_I tra gli elementi di X definita ponendo, per ogni $x, y \in X$:

$$x \; R_I \; y \equiv y \in Y_x$$

vale a dire che $x \; R_I \; y$ vale se e solo se x e y appartengono allo stesso elemento della partizione I (verificare per esercizio che R é una relazione di equivalenza).

La cosa più interessante é però che anche una relazione di equivalenza determina una partizione, vale a dire che partizioni e relazioni di equivalenza sono due modi diversi di parlare della stessa cosa.

Definizione 3.15 (Classe di equivalenza) *Sia R una relazione di equivalenza su un insieme X e sia x un elemento di X. Allora la* classe di equivalenza *di x é il sottoinsieme di X definito da*

$$[x]_R \equiv \{y \in X | \; x \; R \; y\}$$

Possiamo allora dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.16 *Sia R una relazione di equivalenza sull'insieme X. Allora l'insieme*

$$X/R \equiv \{[x]_R \mid x \in X\}$$

delle classi di equivalenza di R é una partizione su X.

Dimostrazione. La prima cosa da osservare é che $\{[x]_R \mid x \in X\}$ é un insieme in quanto, per ogni $x \in X$, $[x]_R$ é un insieme, in quanto sottoinsieme di X, e quindi il principio di buona fondazione ci assicura che non corriamo nessun rischio (si veda comunque il prossimo paragrafo dove vedremo che la collezione $\mathcal{P}(X)$ di tutti i sottoinsiemi di un dato insieme X é un insieme; in virtù dell'assioma del sottoinsieme, questo fatto chiaramente significa che $\{[x]_R \mid x \in X\}$ é un insieme in quanto sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$).

Osserviamo ora che, in virtù della *riflessività* di R, nessuna classe di equivalenza é vuota in quanto, per ogni $x \in X$, $x \in [x]_R$.

Come conseguenza di quanto appena detto si vede subito che ogni elemento di X appartiene ad una qualche classe di equivalenza, vale a dire la *sua* classe di equivalenza, e quindi l'unione di tutte le classi di equivalenza é sicuramente uguale ad X.

Consideriamo ora due classi di equivalenza $[x]_R$ e $[y]_R$. Dobbiamo allora fare vedere che o $[x]_R = [y]_R$ o $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$. Supponiamo allora che $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$. Allora esiste un elemento $z \in X$ tale che $z \in [x]_R$ e $z \in [y]_R$, vale a dire che $x\ R\ z$ e $y\ R\ z$. Ma allora $z\ R\ y$ segue per *simmetria* e quindi si ottiene $x\ R\ y$ per *transitività*.

A conferma che partizioni e relazioni di equivalenza sono due modi alternativi di presentare lo stesso concetto, non é difficile vedere che le due costruzioni che abbiamo proposto sono una l'inversa dell'altra. Infatti se R é una relazione di equivalenza, I_R é la partizione associata ad R e R_{I_R} la relazione di equivalenza associata alla partizione I_R, allora, per ogni $x, y \in X$,

$$\begin{array}{rll} x\ R_{I_R}\ y & \text{sse} & y \in [x]_R \\ & \text{sse} & x\ R\ y \end{array}$$

D'altra parte, per ogni partizione I, la partizione I_{R_I} associata alla relazione di equivalenza R_I associata ad I coincide con la partizione I stessa. Infatti, per ogni $Y \subseteq X$,

$$\begin{array}{rll} Y \in I_{R_I} & \text{sse} & (\exists x \in X)\ Y = [x]_{R_I} \\ & \text{sse} & (\exists x \in X)\ Y = \{z \in X \mid x\ R_I\ z\} \\ & \text{sse} & (\exists x \in X)\ Y = \{z \in X \mid z \in Y_x\} \\ & \text{sse} & (\exists x \in X)\ Y = Y_x \\ & \text{sse} & Y \in I \end{array}$$

É ora possibile vedere che data una relazione di equivalenza R su un insieme X essa induce una relazione identica sull'insieme X/R. Infatti possiamo porre, per ogni coppia di elementi $[x]_R, [y]_R \in X/R$,

$$[x]_R\ \mathsf{Id}_{X/R}\ [y]_R \equiv x\ R\ y$$

Dobbiamo ora verificare che questa definizione é corretta, vale a dire che non dipende dai particolari rappresentanti usati nelle classi di equivalenze. Supponiamo quindi che $[x_1]_R = [x]_R$ e $[y_1]_R = [y]_R$. Allora ricaviamo subito che $x_1\ R\ x$ e $y_1\ R\ y$. Se ora supponiamo che $[x]_R\ \mathsf{Id}_{X/R}\ [y]_R$ otteniamo subito che $x\ R\ y$ e quindi, utilizzando le proprietà *simmetrica* e *transitiva* della relazione R, si vede immediatamente che $x_1\ R\ y_1$ e naturalmente questo implica che $[x_1]_R\ \mathsf{Id}_{X/R}\ [y_1]_R$. Adesso é immediato verificare che $\mathsf{Id}_{X/R}$ é una relazione di identità, vale a dire che se $[x]_R\ \mathsf{Id}_{X/R}\ [y]_R$ allora $[x]_R = [y]_R$. Infatti $[x]_R\ \mathsf{Id}_{X/R}\ [y]_R$ significa che $x\ R\ y$ che vuol dire appunto che $[x]_R = [y]_R$.

3.4 Funzioni

Lo scopo principale di questa sezione é la definizione del concetto di funzione. Dopo aver introdotto nella sezione precedente le relazioni possiamo utilizzarle per scegliere al loro interno le particolari relazioni che sono funzioni.

Definizione 3.17 *Siano X e Y due insiemi. Allora una relazione $R \subseteq X \times Y$ é una funzione se e solo se, per ogni $x \in X$, se $\langle x, y\rangle \in R$ e $\langle x, z\rangle \in R$ allora $y = z$.*

Un'attenta lettura della precedente definizione rivela che le funzioni sono quelle relazioni da X ad Y tali che un elemento x dell'insieme X di partenza (nel seguito X sarà chiamato anche *dominio della funzione*) é in relazione con al più con un solo elemento y dell'insieme Y di arrivo (nel seguito Y sarà chiamato anche *codominio della funzione*). Questo fatto si può anche esprimere sostenendo che la scelta di x *determina* la scelta di y, vale a dire che il valore di y é funzione di x. Il fatto che ci sia al più un solo elemento $y \in Y$ che é in relazione con $x \in X$ ci permette di semplificare un po' la notazione per le funzioni rispetto a quella per le relazioni. Infatti, potremo scrivere $R(x) = y$ al posto di $\langle x, y\rangle \in R$ e dire che y é l'*immagine* di x tramite la funzione R.

Così come nel caso delle relazioni abbiamo individuato delle proprietà particolari di cui una relazione può godere e abbiamo deciso una volta per tutte i nomi di tali proprietà, conviene fare qualcosa di analogo anche nel caso delle funzioni. Siano allora X e Y due insiemi e F una funzione da X a Y. Allora F si dice

- (totale) se, per ogni $x \in X$, esiste un $y \in Y$, e quindi uno solo, tale che la coppia ordinata $\langle x, y\rangle$ appartiene ad F, vale a dire se la funzione é definita per ogni elemento del dominio;
- (suriettiva) se, per ogni $y \in Y$, esiste almeno un $x \in X$, ma non necessariamente uno solo, tale che la coppia $\langle x, y\rangle$ appartiene ad F;
- (iniettiva) se ogni volta che un elemento $y \in Y$ é immagine di un qualche elemento $x \in X$ tale x é unico, vale a dire che se $\langle x_1, y\rangle \in F$ e $\langle x_2, y\rangle \in F$ allora $x_1 = x_2$;
- (biettiva) se F é sia iniettiva che suriettiva.

3.5 Cardinalità

É immediato rendersi conto che il principio di buona fondatezza ci assicura che possiamo riconoscere come insieme anche la collezione di tutti i sottoinsiemi di un qualunque insieme.

Definizione 3.18 (Assioma delle parti) *Sia X un insieme. Allora la collezione di tutti i sottoinsiemi di X é un insieme che chiameremo* potenza *dell'insieme X e indicheremo con $\mathcal{P}(X)$.*

Infatti, per l'assioma del sottoinsieme, ogni sottoinsieme Y di X é a sua volta un insieme e quindi la collezione $\mathcal{P}(X)$ é formata solo da elementi che abbiamo già riconosciuto come insiemi nel momento in cui essa viene formata. Bisogna tuttavia ammettere che se l'insieme X é infinito, come ad esempio ω, il processo di riconoscimento di tutti i sottoinsiemi sembra proprio essere tutto meno che effettivo!

Ora, supponiamo che X sia un insieme finito e indichiamo con $|X|$ il numero di elementi di X, che chiameremo *cardinalità* dell'insieme X. É allora facile dimostrare, usando ad esempio il principio di induzione, che se $|X| = n$ allora $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$. Ma cosa succede nel caso X non sia un insieme con un numero finito di elementi? É facile convincersi che anche $\mathcal{P}(X)$ conterrà un insieme non finito di elementi, ma quanti sono? Sono tanti quanti gli elementi in X? Sono di più come accade nel caso in cui X sia un insieme finito? Per rispondere a queste domande é necessario prima di tutto chiarire cosa si deva intendere in generale con l'operazione di contare il numero di elementi di un insieme.

L'idea generale é quella di rifarsi al modo di contare dei bambini che contano sulle dita, ricordandosi però che noi abbiamo mani con infinite dita! Quello che faremo per contare non sarà cioè, in prima istanza, lo scoprire quanti elementi compaiono in un insieme ma cercheremo piuttosto di capire quando due insiemi abbiano lo stesso numero di elementi. Poi, nello stesso modo di un bambino, diremo che ci sono cinque oggetti quando ci sono tanti oggetti quante sono le dita di una sola mano.

In realtà, abbiamo già predisposto tutto quello che ci serve per risolvere questo primo problema almeno nel caso degli insiemi con un numero finito di elementi. In questo caso infatti due insiemi hanno lo stesso numero di elementi esattamente quando esiste una funzione totale e biettiva dal primo insieme verso il secondo. Infatti, supponiamo di avere due insiemi finiti X e Y e supponiamo che Y abbia meno elementi di X; allora é impossibile definire una funzione tra X e Y che sia totale e iniettiva. D'altra parte se supponiamo che X abbia meno elementi di Y é impossibile definire tra X e Y una funzione che sia suriettiva. Quindi, nel caso stiamo considerando due insiemi finiti per vedere se essi hanno lo stesso numero di elementi possiamo provare a trovare una funzione totale e biettiva dal primo al secondo. Il trucco consiste ora nell'usare lo stesso test come definizione del fatto che due insiemi, anche non finiti, hanno lo stesso numero di elementi.

Definizione 3.19 (Equinumerosità) *Siano X e Y due insiemi. Allora diremo che X e Y sono* equinumerosi *se e solo se esiste una funzione totale e* *biettiva da X verso Y.*

In questo modo siamo riusciti ad avere una nozione di equinumerosità tra due insiemi che non richiede di parlare del numero di elementi di un insieme che é una nozione chiaramente problematica, almeno per quanto riguarda gli insiemi con un numero non finito di elementi. Bisogna però notare subito che questa nozione di equinumerosità produce talvolta risultati inaspettati. Ad esempio, una sua conseguenza immediata é il fatto che l'insieme P dei numeri pari risulta equinumeroso con l'insieme ω dei numeri naturali visto che possiamo definire la seguente mappa double da ω verso P

$$\mathsf{double}(n) \equiv 2n$$

che é chiaramente totale e biettiva. Abbiamo cioè ottenuto che l'insieme dei numeri naturale é equinumeroso con un suo sottoinsieme proprio! Naturalmente questo non dovrebbe stupirci più che tanto visto che nessuno può garantire che una nozione di equinumerosità tra due insiemi, che nel caso tali insiemi siano finiti significa che essi hanno lo stesso numero di elementi e quindi esclude che un insieme finito possa avere lo stesso numero di elementi di un suo sottoinsieme proprio, preservi per intero il suo significato quando essa viene utilizzata su insiemi che finiti non sono. Potremo invece approfittare di questa mancanza di uniformità della nozione di equinumeroso per distinguere gli insiemi finiti da quelli che finiti non sono.

Definizione 3.20 (Insiemi finiti e infiniti) *Sia X un insieme. Allora diremo che X é in* insieme infinito *se esso é equinumeroso con una sua parte propria. Diremo invece che X é un* insieme finito *quando esso non é infinito.*

Non é difficile accorgersi che anche l'insieme dei numeri interi é equinumeroso con l'insieme dei numeri naturali (non daremo qui una definizione formale dell'insieme dei numeri interi all'interno della teoria degli insiemi sebbene la cosa non sia particolarmente difficile). Infatti possiamo utilizzare la seguente mappa $\mathsf{Nat2Int}$

$$\mathsf{Nat2Int}(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

dove $\lfloor q \rfloor$ rappresenta la parte intera del numero razionale q, che risulta evidentemente totale e biettiva.

Un po' più sorprendente é forse il fatto che anche l'insieme delle frazioni, tramite le quali é possibile dare un nome a tutti numeri razionali (in realtà infiniti nomi per ciascun numero razionale!), é equinumeroso con l'insieme dei numeri naturali. In generale, se trascuriamo il problema delle frazioni con denominatore nullo, possiamo pensare ad una frazione come ad una coppia ordinata di numeri naturali. Dobbiamo quindi trovare una mappa totale e biettiva dall'insieme dei numeri naturali all'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali. In pratica é più facile risolvere il problema nell'altra direzione, vale a dire definire una mappa totale é biettiva dall'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali verso l'insieme dei numeri naturali. É facile rendersi conto che vale il seguente lemma e quindi trovare questa mappa é completamente equivalente a trovarne una dall'insieme dei numeri naturali all'insieme delle coppie.

Lemma 3.21 *Siano X e Y due insiemi e sia F una mappa totale e biettiva da X in Y. Allora é possibile definire una mappa totale e biettiva da Y a X.*

Dimostrazione. Si definisca la mappa G da Y a X nel modo seguente:

$$\langle y, x\rangle \in G \equiv \langle x, y\rangle \in F$$

L'idea é naturalmente che la mappa G associa ad $y \in Y$ quell'unico elemento $x \in X$ tale che $F(x) = y$. Dobbiamo allora dimostrare tre cose: prima di tutto bisogna far vedere che G é davvero una funzione, poi che si tratta di una funzione totale e infine che é una funzione biettiva.

- (buona definizione) Supponiamo che sia $\langle y, x_1\rangle$ che $\langle y, x_2\rangle$ siano elementi di G. Allora dobbiamo dimostrare che $x_1 = x_2$. Ma noi sappiamo che se $\langle y, x_1\rangle \in G$ allora $\langle x_1, y\rangle \in F$ e che se $\langle y, x_2\rangle \in G$ allora $\langle x_2, y\rangle \in F$. Ma allora, visto che F é iniettiva in quanto biettiva, $x_1 = x_2$.

- (totalità) Bisogna dimostrare che, per ogni elemento $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $\langle y, x\rangle \in G$. Ma noi sappiamo che affinchè questo accada basta che, per ogni elemento $y \in Y$ esiste un $x \in X$ tale che $\langle x, y\rangle \in F$ che vale visto che F é suriettiva in quanto biettiva.

- (biettività) Dobbiamo dimostrare che G é sia iniettiva che suriettiva. Dimostrare l'iniettività significa far vedere che se $\langle y_1, x\rangle$ e $\langle y_2, x\rangle$ sono elementi di G allora $y_1 = y_2$. Ora $\langle y_1, x\rangle \in G$ implica che $\langle x, y_1\rangle \in F$ e $\langle y_2, x\rangle \in G$ implica che $\langle x, y_2\rangle \in F$. Ma allora otteniamo immediatamente che $y_1 = y_2$ visto che F é una funzione. Per quanto riguarda la suriettività di G, dobbiamo dimostrare che per ogni $x \in X$ esiste un $y \in Y$ tale che $\langle y, x\rangle \in G$. Ora per dimostrare questo risultato basta far vedere che per ogni $x \in X$ esiste un $y \in Y$ tale che $\langle x, y\rangle \in F$ che é una immediata conseguenza della totalità di F.

Possiamo ora risolvere il nostro problema originale esibendo una mappa totale e biettiva che fornisce un numero naturale in corrispondenza di ogni coppia ordinata di numeri naturali:

$$\mathsf{Pair2Nat}(\langle x, y\rangle) \equiv \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x$$

Sebbene il risultato non sia immediato si può dimostrare che $\mathsf{Pair2Nat}(-)$ gode delle proprietà richieste.

Dopo aver visto che i numeri razionali non sono di più che i numeri naturali può forse risultare sorprendente il fatto che non tutti gli insiemi infiniti sono equinumerosi. Infatti con un argomento dovuto a Cantor, e che useremo spesso nel seguito, possiamo far vedere che l'insieme dei sottoinsiemi dei numeri naturali non é equinumeroso con l'insieme dei numeri naturali. É ovvio che per dimostrare questo risultato basta far vedere che ogni funzione dall'insieme ω verso l'insieme $\mathcal{P}(\omega)$ non é suriettiva.

Teorema 3.22 (Teorema di Cantor) *Ogni funzione F da ω a $\mathcal{P}(\omega)$ non é suriettiva.*

Dimostrazione. Basta far vedere che esiste un sottoinsieme di numeri naturali che non é immagine secondo F di nessun numero naturale. É ovvio che tale sottoinsieme dipende dalla funzione F che stiamo considerando. Una possibile scelta é la seguente

$$U_F \equiv \{n \in \omega |\ n \notin F(n)\}$$

Non dovrebbe essere difficile riconoscere nella definizione del sottoinsieme U_F una forte analogia con il paradosso di Russell, ma questa volta la stessa idea, la *diagonalizzazione*, viene utilizzata per definire il sottoinsieme che goda della proprietà richiesta invece che per trovare una contraddizione. Tuttavia il metodo é analogo: faremo infatti vedere che l'ipotesi che U_F sia nell'immagine di F porta a contraddizione e quindi la funzione F non può essere suriettiva. Supponiamo infatti che esista un numero naturale n tale che $U_F = F(n)$. Allora, $n \in F(n)$ se e solo se $n \in U_F$ e quindi, per definizione di U_F, se e solo se $n \notin F(n)$, cioè abbiamo ottenuto una contraddizione.

4 Esercizi

1. Dimostrare che esiste un unico insieme vuoto.

2. Dimostrare che l'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto é l'insieme vuoto.

3. Siano X e Y due insiemi. Verificare che la coppia ordinata $\langle X, Y\rangle$ é un insieme.

4. Siano X_1, X_2, Y_1 e Y_2 degli insiemi. Dimostrare che $\langle X_1, Y_1\rangle = \langle X_2, Y_2\rangle$ se e solo se $X_1 = X_2$ e $Y_1 = Y_2$.

5. Dimostrare che utilizzando l'assioma dell'insieme vuoto, l'assioma del sottoinsieme, l'assioma della coppia e l'assioma dell'unione binaria si possono costruire insiemi di tutte le cardinalità finite.

6. Dimostrare che esistono infiniti insiemi diversi con un solo elemento.

7. Dimostrare che i numeri naturali sono uno diverso dall'altro.

8. Trovare una rappresentazione insiemistica dei numeri interi.

9. Siano X e Y due insiemi tali che $|X| = n$ e $|Y| = m$. Determinare il numero degli elementi di $X \times Y$. Quante sono le relazioni tra X e Y? (Difficile) Quante sono le funzioni tra X e Y?

10. Sia U un insieme e sia R la relazione tra sottoinsiemi di U definita ponendo $\langle X, Y\rangle \in R$ se e solo se $X \subseteq Y$. Dimostrare che R é una relazione d'ordine parziale.

11. Sia R la relazione tra elementi di ω definita ponendo $\langle x, y\rangle \in R$ se e solo se $x \in y$. Dimostrare che R é una relazione d'ordine totale.
12. Sia X un insieme con n elementi. Allora l'insieme $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.
13. Dimostrare che la funzione

$$\mathsf{Nat2Int}(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

che manda un numero naturale in un numero intero é totale e biettiva.

14. (Difficile) Dimostrare che la funzione

$$\mathsf{Pair2Nat}(\langle x, y\rangle) \equiv \frac{1}{2}(x+y)(x+y+1)+x$$

che mappa una coppia ordinata di numeri naturali in un numero naturale é totale e biettiva.