MATEMATICA di BASE - ESERCIZI (Algebra)

Gli esercizi contrassegnati da $(*)$ saranno parte del programma solo se trattati durante la seconda metà del corso.

1. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione

$$(a, b) \sim (a', b') \qquad \text{se e solo se} \qquad a + b' = b + a'.$$

   (a) Si verifichi che $\sim$ è una equivalenza in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

   (b) Si descriva il sottoinsieme $[(2, 5)]_\sim$ di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. $(*)$ Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta $\frac{2\sin^2 x - 3\sin x - 2}{e^{1-\cos x}} \geq 0$.

3. $(*)$ Si consideri il polinomio $f = x^4 + 2x^2 - 8 \in \mathbb{R}[x]$. Dopo aver verificato che $f(\sqrt{2}) = 0$, si fattorizzi f nel prodotto di polinomi rispettivamente di grado ≤ 2 in $\mathbb{R}[x]$ e di grado 1 in $\mathbb{C}[x]$.

4. Sia $\mathbb{C}$ il campo complesso. Si consideri in $\mathbb{C}$ la relazione

$$z \sim w \qquad \text{se e solo se} \qquad z - w \in \mathbb{R}.$$

   (a) Si verifichi che $\sim$ è una equivalenza in $\mathbb{C}$.

   (b) Si individui sul piano di Gauss la classe di equivalenza $[1 + i]_\sim$.

5. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione.

   (a) Sia $B \subseteq Y$. Si completi la definizione: la controimmagine di B "$f^{-1}(B) = \{\dots\}$".

   (b) Si dimostri che f è biiettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ l'insieme $f^{-1}(\{y\})$ contiene esattamente un elemento.

6. Si rappresenti graficamente sul piano l'insieme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - y| < 2\}$$

   (a) $(*)$ Si verifichi che il numero complesso $\sqrt{2} + i$ è zero del polinomio $f = x^4 - 2x^2 + 9 \in \mathbb{R}[x]$.

   (b) Si determinino le radici complesse di f e le loro inverse.

7. $(*)$ Si dica per quali $x \in [-\pi, \pi]$ risulta $\frac{\log_{10}(2\cos x)}{6x^2 - \pi x - \pi^2} \geq 0$.

8. Si dimostri per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, risulta

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3^i = \frac{3^n - 1}{2}$$

9. Si scrivano nella forma $a + i\,b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, le radici terze complesse di 8 e le loro inverse, cioè i numeri complessi z tali che $z^3 = 8$ ed i rispettivi inversi.

10. ($*$) Si consideri il polinomio $f = x^4 + 3x^2 - 4 \in \mathbb{R}[x]$. Dopo aver verificato che $f(1) = 0$, si fattorizzi f nel prodotto di polinomi di grado ≤ 2 in $\mathbb{R}[x]$ ed in polinomi di grado 1 in $\mathbb{C}[x]$.

11. (a) Quali sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ hanno estremo superiore?

    (b) Si completi la definizione: *Sia S sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$. L'estremo superiore* $\sup S$ *di S, se esiste, è ....*

    (c) Si determini $\sup S$, dove $S = \left\{ \frac{n-1}{n} \mid n \in \mathbb{Z},\ n > 0 \right\}$.

12. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ applicazioni. Si dimostri che se f non è iniettiva o g non è suriettiva, allora $g \circ f$ non è biiettiva.

13. ($*$) Si trovino le soluzioni (reali) della disequazione

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{\log_6(x^2)\,(x^2 - 4)} \leq 0.$$