LE RELAZIONI ORDINATE: DEFINIZIONI DI BASE ED APPLICAZIONI

Silvio Valentini

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
Università di Padova

Sunto. Nel lavoro vengono introdotte le *relazioni ordinate* come relazioni binarie sugli elementi di una struttura algebrica ordinata che permettono di darne una rappresentazione di carattere insiemistico.

Si studiano in particolare il caso dei *monoidi ordinati*, dei *quantales* e delle *algebre lineari non commutative*, vale a dire le strutture algebriche per la logica lineare non commutativa. Per quanto rigurda quest'ultima si enuncia anche un teorema di validità e completezza della semantica delle relazioni ordinate rispetto al calcolo usuale (vedi [Abrusci 91]).

Per mantenere lo stile di presentazione più vicino a quello usato nella conferenza non verranno riportate le dimostrazioni ma ci si limiterà a fornire le definizioni e gli enunciati dei teoremi principali. Il lettore interessato non avrà difficoltà a ricostruire le dimostrazioni mancanti, che può comunque trovare in [Valentini 92a] e [Valentini 92b].

Key words and phrases. Monoide ordinato, Quantales, Logica lineare non commutativa.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

1. Introduzione

La logica lineare non commutativa è stata introdotta in [Abrusci 91] e [Yetter 90] come una generalizzazione dell'usuale logica lineare [Girard 87] tramite l'esclusione da un calcolo sequenziale classico [Takeuti 75], oltre che delle regole di Weakening e di Contraction, anche della regola di scambio. Il sistema logico così ottenuto oltre a permettere la distinzione, oramai usuale, tra i due connettivi $\otimes$ (*times*) e & (*with*), che provengono entrambi dall'unico connettivo $\wedge$ (*and*) della logica classica, fa si che il primo di essi risulti non commutativo.

In [Abrusci 91] viene proposta una semantica per questa logica che sostanzialmente estende al caso non commutativo la semantica delle fasi già introdotta per l'usuale logica lineare in [Girard 87]. Nello stesso lavoro Abrusci individua anche le regole per un calcolo di sequenti per la logica lineare non commutativa tale che si possa dimostrare un teorema di completezza rispetto a tale semantica.

Tuttavia nella comunità dei logici interessati alla logica lineare non commutativa esiste da tempo una interpretazione intesa che vuole che una formula venga interpretata in una relazione binaria su un insieme S in modo tale che si possa leggere quest'ultimo come i possibili stati del mondo e la relazione come descrizione estensionale dei possibili risultati di una azione descritta intensionalmente dalla formula che in tale relazione viene interpretata. Questa interpretazione permette in particolare di interpretare il connettivo $\otimes$ di composizione non commutativa tra due formule come la composizione, anche questa non commutativa, tra le relazioni che le interpretano, i.e.

$$\begin{aligned} V(A \otimes B) &= V(A) \circ V(B) \\ &\equiv \{(x,z) : \exists y.(x,y) \in V(A) \wedge (y,z) \in V(B)\}; \end{aligned}$$

inoltre la costante 1, che è l'unità per il connettivo $\otimes$, viene interpretata nella relazione che non cambia lo stato del mondo, vale a dire nella relazione identica, i.e.

$$V(1) = \{(x, x) : x \in S\}.$$

Questa interpretazione è molto naturale anche perchè tutti gli altri connettivi *insiemistici* sono interpretati nel solito modo, i.e. &, $\oplus$ vengono interpretati rispettivamente nell'intersezione e nell'unione.

Non è difficile dimostrare che tale semantica risulta valida, ma basta poca fatica in più per vedere che non è completa in quanto rende vere formule che dimostrabili non sono.

Il mio lavoro è consistito quindi nel ricercare una diversa interpretazione dei connettivi che permetta da un lato di continuare ad interpretare le formule in relazioni binarie su un insieme in modo tale che il connettivo $\otimes$ sia interpretato nella composizione di relazioni, ma che d'altra parte permetta pure di dimostrare i teoremi di validità e completezza. Il primo passo verso la soluzione del problema è stato quello di generalizzarlo un po', vale a dire invece che considerare il caso della logica lineare non commutativa, o meglio delle sue strutture algebriche, vedere quello un po' più astratto dei quantales.

2. Rappresentazione dei quantales tramite le relazioni ordinate.

Iniziamo considerando una struttura algebrica di *monoide ordinato*, i.e. una struttura

$$\mathcal{S} \equiv \langle S, \bullet, 1, \leq \rangle$$

dove S è un insieme, $\bullet$ una operazione associativa, 1 l'unità per l'operazione $\bullet$ e $\leq$ una relazione d'ordine sugli elementi di S compatibile con l'operazione, tale cioè che

$$\frac{a \leq b \quad c \leq d}{a \bullet c \leq b \bullet d}.$$

Possiamo allora introdurre le *relazioni generate* su $\mathcal{S}$ ponendo

$$R_x \equiv \{(y,z) : x \bullet y \leq z\}.$$

Se ora definiamo $I_R \equiv \leq$ e $\leq_R \equiv \supseteq$ non è difficile dimostrare che

$$\mathcal{R}_\mathcal{S} \equiv \langle \{R_x : x \in S\}, \circ, I_R, \leq_R \rangle$$

è un monoide ordinato isomorfo a $\mathcal{S}$ perchè la mappa ϕ che manda un elemento $x \in S$ nella relazione generata R_x è chiaramente suriettiva e per di più iniettiva e monotona in quanto $x \leq y$ sse $R_x \leq_R R_y$.

Il fatto che ogni quantale si possa rappresentare tramite l'insieme delle relazioni generate su di lui è ora una conseguenza immediata. Infatti un quantale $\mathcal{Q}$ è una struttura

$$\mathcal{Q} \equiv \langle Q, \bullet, 1, \bigvee \rangle$$

dove $\langle Q, \bullet, 1\rangle$ è un monoide, $\langle Q, \bigvee\rangle$ è un semireticolo completo e $\bullet$ si distribuisce su $\bigvee$, i.e. $\bigvee\{x_i : i \in I\} \bullet y = \bigvee\{x_i \bullet y : i \in I\}$ e $y \bullet \bigvee\{x_i : i \in I\} = \bigvee\{y \bullet x_i : i \in I\}$.
È ora ovvio che ponendo

$$x \leq y \equiv y = \bigvee\{x, y\}$$

si ottiene una struttura di monoide ordinato e quindi che quanto visto sopra si applica anche al caso dei quantales. Tuttavia è interessante notare che nello stesso modo in cui $\bullet$ viene rappresentato dalla composizione $\circ$ tra relazioni generate anche $\bigvee$ ha una facile interpretazione insiemistica; infatti, sfruttando il fatto che $\bullet$ si distribuisce su $\bigvee$, si vede subito che

$$R_{\bigvee\{x_i : i \in I\}} = \bigcap\{R_{x_i} : i \in I\}.$$

Il caso dei quantales è comunque più interessante di quello di un generico monoide ordinato perchè esiste una caratterizzazione assiomatica delle relazioni generate. Intanto si vede subito che l'operazione di supremo arbitrario $\bigvee$ permette di definire una operazione di infimo arbitrario ponendo, come al solito,

$$\bigwedge\{x_i : i \in I\} \equiv \bigvee\{y : (\forall i \in I) \quad y \leq x_i\}$$

Possiamo allora dare la definizione di relazione ordinata.

Definizione. Diremo *relazione ordinata* ogni relazione binaria R sul quantale $\mathcal{Q}$ tale che

(1) sia compatibile con $\leq$, i.e. $\frac{u \leq x \quad xRy \quad y \leq z}{uRz}$
(2) sia compatibile con $\bigvee$, i.e. $\frac{(\forall i \in I) x_i Ry}{\bigvee\{x_i : i \in I\} Ry}$
(3) sia compatibile con $\bigwedge$, i.e. $\frac{(\forall i \in I) xRy_i}{xR \bigwedge\{y_i : i \in I\}}$

È ora quasi immediato dimostrare che ponendo $I_R \equiv \leq$ e $\bigvee_R \equiv \bigcap$ si ha il seguente teorema.

Teorema. *La struttura* $\langle R_Q, \circ, I_R, \bigvee_R \rangle$ *dove* R_Q *è l'insieme delle relazioni ordinate sul quantale* Q *è a sua volta un quantale.*

Non è adesso difficile dimostrare che le relazioni generate sono un sottoinsieme delle relazioni ordinate, vale a dire che sono compatibili con $\leq$, $\bigvee$ e $\bigwedge$, e quindi che ogni quantale è isomorfo ad un sottoquantale del quantale delle relazioni ordinate su di lui. Possiamo tuttavia fare di più caratterizzando direttamente quelle tra le relazioni ordinate che sono relazioni generate.

Definizione. Sia $\mathcal{Q}$ un quantale. Chiameremo allora *implicazione sinistra* l'operazione su Q definita da

$$y \leftarrow x \equiv \bigvee\{w : w \bullet x \leq y\}.$$

Non è difficile rendersi conto che l'implicazione sinistra è in effetti una operazione di implicazione, vale a dire che, per ogni $x, y, z \in Q$, $z \bullet x \leq y$ sse $z \leq y \leftarrow x$.

Chiamiamo ora *relazioni ordinate destre* le relazioni ordinate tali che valgano anche le seguenti

(4) compatibilità con $\bullet$: $\frac{xRy}{x \bullet w \ R \ y \bullet w}$

(5) compatibilità con $\leftarrow$: $\frac{xRy}{x \leftarrow w \ R \ y \leftarrow w}$

Con alcuni calcoli si può vedere che le relazioni ordinate destre sono esattamente le relazioni generate e si dimostra quindi che ogni quantale è isomorfo al quantale delle relazioni ordinate destre su di lui. Il punto chiave per ottenere la dimostrazione è provare che ogni relazione ordinata destra R è determinata dalla sua *1-immagine*, i.e. dall'insieme $\{y : 1Ry\}$, in quanto $R = \bigcup\{R_y : 1Ry\}$.

3. La logica lineare non-commutativa

Passare dai quantales alla logica lineare non-commutativa significa sostanzialmente rinunciare alle operazioni infinitarie. Questo è il motivo per cui in questo paragrafo considereremo le *algebre lineari non commutative*, vale a dire le strutture

$$\mathcal{M} \equiv \langle M, \bullet, 1, \vee, \bot, \wedge, \top, \rightarrow, \leftarrow \rangle$$

dove $\langle M, \bullet, 1 \rangle$ è un monoide, $\langle M, \vee, \bot, \wedge, \top \rangle$ è un reticolo con massimo e minimo elemento, denotati da $\top$ e $\bot$ rispettivamente, e per cui valgono le seguenti:

(1) distributività

$x \bullet (y \vee z) = (x \bullet y) \vee (x \bullet z) \qquad (y \vee z) \bullet x = (y \bullet x) \vee (z \bullet x)$,

$\bot \bullet x = \bot = x \bullet \bot$,

(2) implicazioni

$x \bullet z \leq y$ sse $z \leq x \rightarrow y \qquad z \bullet x \leq y$ sse $z \leq y \leftarrow x$.

Anche nel caso delle algebre lineari non commutative possiamo introdurre una relazione d'ordine compatibile con $\bullet$, come abbiamo già fatto per i quantales, ponendo

$$x \leq y \equiv y = x \vee y.$$

In questo modo ci riportiamo nella situazione originale del monoide ordinato e possiamo quindi sfruttare il lavoro già fatto. Abbiamo in particolare il solito teorema di rappresentazione di un'algebra lineare non commutativa tramite le relazioni generate su di lei, ma possiamo essere un po' più precisi mostrando esplicitamente come sono costruite le relazioni generate corrispondenti alle varie operazioni e costanti che abbiamo definito su una algebra lineare non commutativa.

Per quanto riguarda $\bullet$ e 1 sappiamo già che divengono rispettivamente la composizione tra relazioni generate e la relazione d'ordine $\leq$ dell'algebra lineare non commutativa di partenza. Vediamo allora cosa succede per le altre operazioni. Il caso dei quantales suggerisce immediatamente cosa succede per l'operazione di supremo $\vee$.

Lemma. *Sia $\mathcal{M}$ una algebra lineare non commutativa. Allora $R_{x \vee y} = R_x \cap R_y$.*

Per di più una verifica diretta è tutto quello che serve per provare il prossimo lemma.

Lemma. *Sia $\mathcal{M}$ una algebra lineare non commutativa. Allora $R_{\perp} = M \times M = \{(x, y) : x, y \in M\}$.*

Una volta visto che l'operazione $\vee$ tra due elementi di una algebra lineare non commutativa diviene l'intersezione delle rispettive relazioni generate non è difficile, ispirandosi direttamente a quanto fatto per i quantales dove le operazioni e le costanti che richiediamo in una algebra lineare non commutativa possone essere tutte introdotte per definizione, vedere come ogni operazione e costante è collegata con le rispettive relazioni generate.

Lemma. *Sia $\mathcal{M}$ una algebra lineare non commutativa. Allora*

$$R_{y\wedge x} = \bigcap\{R_w : R_x \cup R_y \subseteq R_w\} \quad R_\top = \bigcap\{R_w : w \in M\}$$

$$R_{y\leftarrow x} = \bigcap\{R_w : R_y \subseteq R_w \circ R_x\} \; R_{x\rightarrow y} = \bigcap\{R_w : R_y \subseteq R_x \circ R_w\}$$

Ora possiamo concludere tutto questo lavoro inteso a rappresentare un'algebra lineare non commutativa tramite un insieme di relazioni binarie; sia infatti R_M l'insieme delle relazioni generate su M e $R, S \in R_M$ e poniamo

$$\begin{array}{ll} R \bullet_R S \equiv R \circ S & I_R \equiv \{(x,y) : x \leq y\} \\ R \vee_R S \equiv R \cap S & \bot_R \equiv M \times M \\ R \wedge_R S \equiv \bigcap\{T \in R_M : R \cup S \subseteq T\} & \top_R \equiv \bigcap\{T : T \in R_M\} \end{array}$$

$$S \leftarrow_R R \equiv \bigcap\{T \in R_M : S \subseteq T \circ R\}$$

$$R \rightarrow_R S \equiv \bigcap\{T \in R_M : S \subseteq R \circ T\}.$$

Abbiamo allora il seguente teorema.

Teorema. *Sia $\mathcal{M}$ una algebra lineare non commutativa. Allora*

$$\langle R_M, \bullet_R, I_R, \vee_R, \bot_R, \wedge_R, \top_R, \leftarrow_R, \rightarrow_R \rangle$$

è un'algebra lineare non commutativa isomorfa a $\mathcal{M}$.

Quanto fatto trova una immediata applicazione nella soluzione del problema che ci eravamo proposti all'inizio di questo lavoro, quello cioè di trovare una semantica valida e completa per la logica lineare non commutativa in termini di relazioni binarie in modo che il connettivo $\otimes$ divenga la composizione di relazioni. Consideriamo infatti la seguente interpretazione delle formule della logica lineare[1]

[1] In realtà daremo la dimostrazione per il caso della logica lineare non commutativa intuizionista senza esponenziali, ma il caso classico e l'estensione con gli esponenziali è più o meno standard e in ogni caso si può trovare in [Valentini 92b]

nell'insieme delle relazioni generate di una algebra lineare non commutativa

$$\begin{array}{rcl} V(A \otimes B) = V(A) \bullet_R V(B) & \qquad & V(1) = I_R \\ V(A \oplus B) = V(A) \vee_R V(B) & & V(\bot) = \bot_R \\ V(A \& B) = V(A) \wedge_R V(B) & & V(\top) = \top_R \\ V(B \leftarrow A) = V(B) \leftarrow_R V(A) & & V(A \rightarrow B) = V(A) \rightarrow_R V(B) \end{array}$$

È ora abbastanza facile verificare che questa interpretazione è corretta, infatti vale il seguente teorema[2] .

Teorema: Validità. *Sia A un teorema della logica lineare non commutativa. Allora per ogni interpretazione $V(-)$, definita come sopra, in un insieme di relazioni generate su un algebra lineare non commutativa si ha $V(A) \subseteq I_R$.*

L'aspetto più interessante di questo approccio è la facilità con cui si può ora ottenere il teorema di completezza. Sia infatti $\mathcal{F}rm$ l'algebra di Lindenbaum della logica lineare non commutativa, i.e. la struttura algebrica che ha per elementi le classi di equivalenza $[A]$ che si ottengono identificando le formule equidimostrabili, i.e. $[A] \equiv \{C : A \vdash C \text{ e } C \vdash A\}$. Non è difficile rendersi conto che anche $\mathcal{F}rm$ è un'algebra lineare non commutativa con le operazioni definite nel modo ovvio a partire dai connettivi e dalle costanti logiche. Ne segue che le relazioni generate su $\mathcal{F}rm$ sono un insieme che può essere utilizzato per interpretare le formule della logica lineare non commutativa. Consideriamo allora la valutazione $V^*(-)$ che manda la variabile proposizionale P_i nella relazione generata

[2] Con la stessa fatica si può provare un teorema di validità leggermente più forte, i.e. si può dimostrare che con una interpretazione analoga a quella data sopra per il caso delle relazioni generate si ha che se A è un teorema della logica lineare non commutativa allora $1 \leq V(A)$ in ogni algebra lineare non commutativa.

$R_{[P_i]} = \{([C],[D]) : P_i \otimes C \vdash D\}$. Si vede quasi subito, per induzione sulla costruzione della formula, che la valutazione $V^*(-)$ è tale che per ogni formula A si ha $V^*(A) = R_{[A]}$. Ma allora se $V^*(A) \subseteq I_R$, i.e. se $\{([C],[D]) : A \otimes C \vdash D\} \subseteq \{([C],[D]) : 1 \otimes C \vdash D\}$, si ha subito che $([1],[A]) \in \{([C],[D]) : 1 \otimes C \vdash D\}$, visto che $([1],[A]) \in \{([C],[D]) : A \otimes C \vdash D\}$ poichè ovviamente $A \otimes 1 \vdash A$, per cui $1 \otimes 1 \vdash A$, i.e. $\vdash A$. Abbiamo perciò dimostrato il seguente teorema.

Teorema: Completezza. *Se per ogni valutazione $V(-)$ delle formule della logica lineare non commutativa si ha che $V(A) \subseteq I_R$ allora $\vdash A$.*

References

[Abrusci 91] V.M. Abrusci, *Phase semantics and sequent calculus for pure non commutative classical propositional linear logic*, Journal of Symbolic Logic **56-4** (1991), 1403-1452.

[Girard 87] J.I. Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science **50** (1987), 1-102.

[Takeuti 75] G. Takeuti, *Proof Theory*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[Valentini 92a] S.Valentini, *Representation theorems for quantales*, sottoposto a Mathematical Structures in Computer Science.

[Valentini 92b] S.Valentini, *A simple interpretation of the non-commutative linear logic: the semantics of the ordered relations*, sottoposto a Mathematical Structures in Computer Science.

[Yetter 90] D.N. Yetter, *Quantales and (noncommutative) linear logic*, Journal of Symbolic Logic **55** (1990), 41-64.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova, via G. Belzoni n.7, I-35131 Padova (ITALY)

E-mail address: valentini@pdmat1.unipd.it