PROPOSITUM CAMERINIENSE
sive etiam
itinera certaminis inter rationem
insiemes aedificandi analisym situs intuitionisticamque
et mathematicae artium reliquas res

Paulus Venetus[1]

Societas Mathematica Rationalis Adhibitaque
Universitas Patavii

Key words and phrases. Intuitionistic Theory of Types, Pointfree Topology, Complete Lattice, Quantale, Locale.

[1]Versione di S.Valentini della conferenza tenuta da G.Sambin a Camerino nell'aprile '92. Essendo la relazione di Sambin basata sul lavoro portato avanti da un gruppo di ricercatori presso il Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata dell'Università di Padova mi è sembrato più opportuno usare come nome dell'autore, in vece di quello di Sambin e del mio, quello di un famoso logico padovano del 1400 (attivo per un lungo periodo a Siena!)

SUNTO. In questo articolo viene illustrato il lavoro che l'autore ha portato avanti soprattuto a Padova. Esso si propone, un po' ambiziosamente, di ricostruire algebra e topologia all'interno della teoria intuizionistica dei tipi di Martin-Löf o di qualche sua opportuna estensione.

Il vantaggio di sviluppare una teoria matematica all'interno di una teoria costruttiva degli insiemi, a patto di non farsi prendere da manie fondamentaliste troppo rigide, consiste principalmente nel poter controllare il grado di costruttività dei risultati ottenuti o meglio, come vedremo, di controllare il grado di "distruttività", cioè di astrazione e di idealizzazione, che si è disposti ad accettare.

I principali risultati ottenuti fino ad ora comprendono, oltre alle necessarie definizioni, alcuni teoremi di rappresentazione per reticoli completi, quantale e locale, e quindi teoremi di completezza per la logica lineare ed intuizionista sia proposizionale che predicativa, e la definizione degli spazi topologici e dei loro punti, con particolare attenzione agli spazi di Scott e di Stone.

IL PROGRAMMA DI CAMERINO

Prima di iniziare con gli aspetti tecnici di questa relazione è opportuno cercare di inquadrarla dal punto di vista fondazionale per non correre il rischio che a chi legge sfugga, oltre al senso delle scelte fatte, anche il fatto che hanno un senso.

Dal punto di vista intuitivo potremo descrivere la costruttività come una misura del dettaglio con cui si vuole osservare e descrivere un certo soggetto. Si consideri ad esempio la descrizione di un territorio; a questo scopo esistono varie possibilità che vanno dalle foto dal satellite all'osservazione con la lente passando per le passeggiate a piedi, le gite in bicicletta e le corse in automobile. Naturalmente tutti gli approcci hanno i loro vantaggi e i loro limiti: il livello di dettaglio nelle foto dal satellite non potrà essere confrontabile con quello che si può ricavare andando a passeggio ma la visione d'insieme della struttura del territorio sarà sicuramente più facilmente afferrabile. In modo analogo l'approccio *classico* alle teorie matematiche assomiglia un po' ad una visione globale dal satellite: ci sono solo due livelli di descrizione possibili in quanto le proposizioni sono o vere o false e in un certo senso le proposizioni vere altro non sono che modi diversi di denotare sempre la stessa cosa; questo *spaccare* il mondo in due corrisponde al massimo livello di astrazione, cioè di allontanamento dal soggetto dello studio. D'altro canto, l'approccio *intuizionista* è un po' più dettagliato in quanto, oltre al fatto di sapere se una proposizione è vera, permette anche di distinguere tra differenti dimostrazioni della stessa proposizione e, a posteriori, di distinguere tra loro proposizioni egualmente vere guardando al modo in cui esse sono state dimostrate; a questo fine si cerca in ogni passo della dimostrazione di evitare di perdere *informazione*: questo porta in modo molto naturale, e per nulla ideologico, a rifiutare principi di esistenza puri, come potrebbe essere il principio del filtro primo, che non forniscono una costruzione degli oggetti di cui pretendono l'esistenza. Infine oggi possiamo considerare anche altri approcci, ancora meno astratti, come ad esempio quello *lineare* e in futuro potremo forse considerare anche una logica completamente finita che corrisponda ad uno studio del territorio a livello atomico.

Restando all'interno dell'esempio potremo dire che la teoria Intuizionistica dei Tipi di Martin-Löf, che noi vogliamo usare, corrisponde un po' all'andare in bicicletta: si sta all'aria aperta, è ecologica e non inquina (nella teoria Intuizionistica dei Tipi ogni regola ha una chiara giustificazione semantica in termini di computazioni e in ogni caso una dimostrazione matematica della sua consistenza si può trovare in [Bossi-Valentini 92]), ci si può fermare facilmente quando si vuole per osservare meglio le cose ma permette già di muoversi abbastanza agevolmente (si conserva la costruttività pur potendo sviluppare un'intuizione astratta) e se dotata di un buon cambio permette di correre anche abbastanza veloci (la teoria Intuizionistica dei Tipi si è già affermata come un potente strumento in Informatica, si veda ad esempio [Nordstrom-Petersson-Smith 90]).

Tuttavia la bicicletta così com'è non permette di percorrere grandi distanze e questo è il motivo per cui noi proponiamo di dotarla di un qualche motorino che, fuori dall'esempio, consiste nel fatto di fare alla teoria opportune aggiunte ma anche e soprattutto delle *dimenticanze*, che corrispondono ad una maggiore astrazione, che permettano, quando si vuole, di correre un po' più veloci. Naturalmente queste modifiche cambieranno un po' le caratteristiche della *bicicletta* ma essendo noi i *meccanici* esse rimarranno sotto il nostro controllo.

La teoria intuizionistica dei tipi

La teoria intuizionistica dei tipi è stata introdotta da Martin-Löf [Martin-Löf 84] come alternativa costruttiva alla teoria degli insiemi classica. L'idea di fondo nella teoria intuizionistica dei tipi è che specificare un insieme significa fornire un metodo che permetta di generarne gli elementi. Ad esempio, costituiscono un insieme i numeri naturali perché sono (equivalenti a) 0 o successori di un elemento che sia già stato riconosciuto come numero naturale e naturalmente anche i sottoinsiemi finiti di numeri naturali perché possono essere ovviamente generati (cfr. [Sambin-Valentini 93]), mentre la collezione di tutti i sottoinsiemi dei numeri naturali non costituisce un insieme in quanto, per motivi di cardinalità, non può esistere alcun metodo per generarli tutti tramite un insieme effettivo di regole. Oltre agli insiemi di base, la teoria permette di introdurre, in modo estremamente costruttivo, anche insiemi composti ottenuti tramite prodotti e somme disgiunte di famiglie di insiemi e altre costruzioni ancora più complesse.

Dal punto di vista formale la teoria si basa sulla possibilità di enunciare giudizi in una delle seguenti forme:

$$A \text{ set}$$
$$A = B$$
$$a \in A$$
$$a = b \in A$$

il cui significato è rispettivamente che A è un insieme, che A e B sono insiemi uguali, che a è un elemento dell'insieme A e che a e b sono elementi uguali dell'insieme A. Oltre ai giudizi chiusi, che non dipendono cioè da assunzioni e non contengono perciò variabili libere, si possono formare anche giudizi ipotetici con una struttura delle assunzioni di complessità arbitraria, quali ad esempio

$$B(x) \text{ set } [x : A]$$
$$b(x) \in B(x, y)\ [x : A_1, y : A_2(x)]$$

che significano rispettivamente che $B(x)$ è un insieme ammesso che x sia un elemento dell'insieme A e che $b(x)$ è una funzione che dato un elemento a dell'insieme A_1 fornisce un elemento $b(a)$ dell'insieme $B(a, y)$ al variare di y in $A_2(a)$.

Vale la pena di ricordare che la costruttività della teoria intuizionistica dei tipi permette di affiancare letture di carattere notevolmente diverso a quella da noi finora utilizzata secondo la quale i giudizi si riferiscono ad una teoria costruttiva degli insiemi; alcune possibilità sono ad esempio quella di leggere un tipo come una proposizione ed un suo elemento come una sua prova, ed in questo caso useremo la notazione "A prop" al posto di quella di "A set" che abbiamo usato finora, oppure ancora un tipo come specifica di un problema ed un suo elemento come un programma che tale problema risolve [Martin-Löf 82].

1. La nozione di sottoinsieme. La teoria intuizionistica dei tipi non è tuttavia sufficiente per sviluppare teorie matematiche complesse. Infatti, come abbiamo visto, manca la possibilità di trattare in modo naturale il concetto di sottoinsieme e la collezione di tutti i sottoinsiemi di un insieme non costituisce un insieme. Addirittura, non è vero che un sottoinsieme di un dato insieme sia a sua volta un insieme; si consideri ad esempio la collezione dei codici delle funzioni ricorsive la cui computazione non si arresta quando sono applicate a 0: si tratta evidentemente di un sottoinsieme dei numeri naturali, ma a causa dell'"halting problem" non esiste sicuramente un metodo per generare i suoi elementi e non può essere quindi un insieme all'interno della teoria intuizionistica dei tipi.

Allo scopo di aggirare queste difficoltà, riprendendo un idea già accennata in [Sambin 87], in [Sambin-Valentini 93] viene proposto, seguendo un chiaro suggerimento della teoria classica degli insiemi, di definire quale sottoinsieme dell'insieme S una qualsiasi funzione proposizionale su S; si pone cioè

$$U \subseteq S \equiv U(x) \text{ prop } [x : S].$$

Questa definizione suggerisce quello che si deve fare per ricostruire una notazione adatta per una elementare teoria degli insiemi; porremo quindi[2]

$$\begin{gathered} \{x \in S : U(x)\} \equiv (x : S)\ U(x) \\ a\ \varepsilon_S\ U \equiv a \in S \text{ e } U(a) \text{ è vero} \\ U \subseteq_S V \equiv (\forall x \in S)\ (U(x) \rightarrow V(x)) \end{gathered}$$

[2] La definizione di ε è un chiaro esempio di momento in cui si *dimentica* in quanto non si è più interessati a sapere *come* $U(a)$ è stato dimostrato ma solamente al fatto di averne una dimostrazione, cioè che sia vero. Dal punto di vista tecnico questo momento di astrazione si può formalizzare aggiungendo una nuova forma di giudizio, vale a dire il giudizio 'A vero', alle quattro che abbiamo considerato nel paragrafo precedente.

e potremo quindi definire le solite operazioni insiemistiche ponendo

$$\begin{aligned}
&U \cap_S V \equiv U(x) \wedge V(x) \text{ prop } [x : S] \\
&U \cup_S V \equiv U(x) \vee V(x) \text{ prop } [x : S] \\
&\bigcap_{i \in I} V_i \equiv (\forall i \in I)\ V(i, x) \text{ prop } [x : S] \\
&\bigcup_{i \in I} V_i \equiv (\exists i \in I)\ V(i, x) \text{ prop } [x : S].
\end{aligned}$$

e recuperare la quantificazione sugli elementi di un sottonsieme U di S nel modo che segue:

$$\begin{aligned}
(\forall x\ \varepsilon_S\ U)\ A(x) &\equiv (\forall x \in S)\ U(x) \rightarrow A(x) \\
(\exists x\ \varepsilon_S\ U)\ A(x) &\equiv (\exists x \in S)\ U(x) \wedge A(x).
\end{aligned}$$

Il risultato di queste definizioni, assieme al calcolo logico intuizionista che è comunque alla base dalla teoria intuizionistica dei tipi di Martin-Löf, permette di sviluppare una sorta di teoria locale degli insiemi (cfr. [Bell 88]) che si è già rivelata sufficiente per affrontare alcuni specifici problemi matematici (si veda ad esempio [Sambin-Valentini-Virgili 92]).

2. Relazioni finitarie ed infinitarie. L'estensione della teoria dei tipi di Martin-Löf che abbiamo descritto nel precedente paragrafo è proprio ciò che serve per trattare anche tematiche topologiche oltre a quelle algebriche. Infatti, mentre per trattare di strutture algebriche bastano naturalmente le relazioni finitarie ed è ovvio che una qualsiasi relazione binaria (più generalmente finitaria) tra elementi ha una sua naturale rappresentazione in teoria intuizionistica dei tipi tramite una funzione proposizionale a due posti

$$R(x, y) \text{ prop } [x : S, y : T]$$

per trattare convenientemente con questioni di topologia si ha bisogno anche di relazioni infinitarie. L'introduzione dei sottoinsiemi, vista nel paragrafo precedente, permette appunto di definire anche relazioni infinitarie. L'idea di base è di permettere l'uso nelle derivazioni anche di assunzioni della forma $U(x)$ prop $[x : T]$ allo scopo di ottenere giudizi come

$$R(x_1, \ldots, x_n, U_1, \ldots, U_m) \text{ prop} \quad [x_1 : S_1, \ldots, x_n : S_n, U_1 \subseteq T_1, \ldots, U_m \subseteq T_m]$$

che è una relazione tra gli elementi $x_1, \ldots, x_n$ degli insiemi $S_1, \ldots, S_n$ ed i sottoinsiemi $U_1, \ldots, U_m$ degli insiemi $T_1, \ldots, T_m$.

Un semplice esempio di relazione infinitaria è proprio la relazione di appartenenza ε_S che abbiamo introdotto nel paragrafo precedente.

Teoremi di presentazione

Tramite le relazioni infinitarie possiamo recuperare gli operatori su un insieme [Sambin 87]. Un operatore $\mathcal{C}$ su un insieme S è infatti una mappa dalla collezione dei sottoinsiemi di S in sé:

$$\mathcal{C} : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$$

vale a dire, usando la nostra definizione, che $\mathcal{C}$ è una mappa dalla collezione dei sottoinsiemi di S verso le funzioni proposizionali su S

$$\mathcal{C} : \mathcal{P}(S) \to (S \to \text{ Prop})$$

e quindi ad ogni operatore su un insieme si può associare in modo naturale una relazione infinitaria $\lhd$, che ci fa comodo chiamare fin da ora *copertura* anche se solo più avanti vedremo quali condizioni su $\lhd$ sono necessarie per giustificare il nome, tra elementi di S e sottoinsiemi di S tale che

$$\lhd : S \times \mathcal{P}(S) \to \text{ Prop},$$

definita ponendo che

$$a \lhd_{\mathcal{C}} U \text{ è vero se e solo se } a \, \varepsilon_S \, \mathcal{C}(U).$$

Nel seguito diremo saturo un sottoinsieme di S che contenga tutti gli elementi che *copre* e, dato un operatore $\mathcal{C}$ sull'insime S, chiameremo $Sat(\mathcal{C})$ la collezione di tutti i sottoinsiemi saturi di S.

Non è ora difficile rendersi conto che data una relazione infinitaria $\lhd$ tra elementi e sottoinsiemi di S possiamo facilmente ottenere un operatore su S ponendo

$$\mathcal{C}_{\lhd}(U) \equiv \{a \in S : a \lhd U\}$$

e che le due costruzioni sono una l'inversa dell'altra.

Non dovrebbe quindi stupire che le proprietà dell'operatore $\mathcal{C}$ sull'insieme S si possano esprimere tramite proprietà su $\lhd_{\mathcal{C}}$. In particolare, se scriviamo $U \lhd V$ come abbreviazione di $(\forall x \in S)\ x \lhd U \rightarrow x \lhd V$, otteniamo che $\mathcal{C}$ è un operatore di chiusura[3] se e solo se $\lhd_{\mathcal{C}}$ soddisfa a

(riflessività) $$\frac{a \, \varepsilon_S \, U}{a \lhd_{\mathcal{C}} U}$$

(transitività) $$\frac{a \lhd_{\mathcal{C}} U \qquad U \lhd_{\mathcal{C}} V}{a \lhd_{\mathcal{C}} V}$$

Analogamente al modo in cui abbiamo associato un operatore con una relazione infinitaria, possiamo associare ad essa una relazione di equivalenza tra sottoinsiemi di S ponendo

$$U \sim_{\lhd} V \equiv (\forall x \in S)\ x \lhd U \leftrightarrow x \lhd V$$

[3] $\mathcal{C}$ è un operatore di chiusura sull'insieme S se, per ogni $U \subseteq S$, $U \subseteq_S \mathcal{C}(U)$ e da $U \subseteq_S \mathcal{C}(V)$ segue che $\mathcal{C}(U) \subseteq_S \mathcal{C}(V)$

che sostanzialmente significa che due sottoinsiemi U e V di S sono equivalenti quando $\mathcal{C}_\lhd(U) = \mathcal{C}_\lhd(V)$. D'altra parte, si può associare una copertura ad ogni relazione di equivalenza $\sim$ tra sottoinsiemi di S ponendo

$$a \lhd_\sim U \equiv (U \cup \{a\} \sim U)$$

che, nel caso $\lhd$ sia riflessiva e transitiva e $\sim$ rispetti l'unione, fa si che le due costruzioni siano una l'inversa dell'altra.

Ricapitolando le seguenti sono equivalenti

$$\lhd \text{ è riflessiva a transitiva} \tag{1}$$

$$\mathcal{C}_\lhd \text{ è un operatore di chiusura} \tag{2}$$

$$\sim_\lhd \text{ è una equivalenza che rispetta } \cup, \tag{3}$$

$$\text{cioè una congruenza su } \langle \mathcal{P}(S), \bigcup \rangle.$$

Questa equivalenza suggerisce di considerare direttamente i saturi di $\mathcal{C}$ come gli aperti di quella che, quando introdurremo anche una operazione di intersezione, diventerà una topologia, o più formalmente di considerare la collezione $\mathrm{Open}(\mathcal{C})$ che otteniamo come quoziente della collezione dei sottoinsiemi di S rispetto alla congruenza associata a $\mathcal{C}$.

1. Reticoli completi. La struttura degli aperti $\mathrm{Open}(\mathcal{C})$ di un operatore $\mathcal{C}$ di chiusura, o equivalentemente degli aperti associati ad una relazione infinitaria, permette di rappresentare, all'interno della teoria intuizionistica dei tipi, alcune classiche strutture matematiche [Battilotti-Sambin 93]. Iniziamo analizzando il caso più elementare, vale a dire quello di una semplice relazione infinitaria riflessiva e transitiva o, equivalentemente, di un operatore di chiusura $\mathcal{C}$.

La prima cosa da osservare è che ponendo

$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{C}(U_i) \equiv \mathcal{C}(\bigcup_{i \in I} \mathcal{C}(U_i))$$

la collezione degli aperti assume una struttura di reticolo completo in quanto $\mathcal{C}(U_i) \subseteq \mathcal{C}(V)$ per ogni $i \in I$ se e solo se $\bigcup_{i\in I} \mathcal{C}(U_i) \subseteq \mathcal{C}(V)$ se e solo se $\mathcal{C}(\bigcup_{i\in I} \mathcal{C}(U_i)) \subseteq \mathcal{C}(V)$.

Il fatto interessante è che vale anche il viceversa, vale a dire che ogni reticolo completo è isomorfo alla collezione dei saturi di un opportuno operatore di chiusura tra insiemi. Infatti se $\mathcal{L} \equiv \langle L, \leq \rangle$ è un reticolo completo e S è una *base* per $\mathcal{L}$, vale a dire un sottoinsieme di L tale che ogni $a \in L$ si possa esprimere come supremo degli elementi in S minori di a, allora ponendo, per ogni $a \in S$ e $U \subset S$

$$a \lhd_S U \equiv a \leq \bigvee U$$

si ottiene evidentemente una relazione infinitaria riflessiva e transitiva tale che $\langle\ \mathrm{Sat}(\mathcal{C}_{\lhd_S}), \subseteq \rangle$ è un reticolo completo isomorfo a $\mathcal{L}$ tramite la mappa che manda il sottoinsieme saturo $\mathcal{C}(U)$ in $\bigvee U$.[4]

2. Quantale e locale. Una volta visto, non è difficile estendere il metodo che abbiamo usato per rappresentare i reticoli completi al caso di strutture algebriche più complesse [Battilotti-Sambin 93]. Consideriamo ad esempio il caso dei quantale [Rosenthal 90]. Ricordiamo che un quantale (unitario) è una struttura

$$\mathcal{Q} \equiv \langle Q, \bullet, 1, \bigvee \rangle$$

[4]L'interesse fondazionale del teorema appena visto sta nel fatto che un reticolo, che può essere stato costruito sopra una qualsiasi *collezione*, tramite l'uso delle pretopologie viene rappresentato usando una base, vale a dire un *insieme*; questo tra l'altro significa che il teorema di rappresentazione è di carattere generale solamente per un *classico*, vale a dire per un matematico che non distingue tra collezioni e insiemi nel senso della teoria dei tipi per il quale forse non risulta neppure particolarmente nuovo (!), mentre per un *intuizionista* esso deve considerarsi ristretto al caso dei reticoli *insiemisticamente basati*, vale a dire quelli i cui elementi si possono tutti ottenere come supremo di elementi di un insieme.

tale che $\langle Q, \bullet, 1\rangle$ è un monoide, $\langle Q, \bigvee\rangle$ è un semireticolo completo e $\bullet$ distribuisce su $\bigvee$, cioè per ogni $y, x_1, x_2, \dots \in Q$,

$$y \bullet \bigvee\{x_i : i \in I\} = \bigvee\{y \bullet x_i : i \in I\}$$
$$\bigvee\{x_i : i \in I\} \bullet y = \bigvee\{x_i \bullet y : i \in I\}.$$

Per rappresentare i quantale, in modo analogo a quanto fatto per i reticoli completi, dovremo evidentemente operare su un insieme S su cui sia definita anche una operazione binaria $\bullet_{\mathcal{S}}$ in modo tale che

$$\mathcal{S} \equiv \langle S, \bullet_{\mathcal{S}}, 1_{\mathcal{S}}\rangle$$

sia un monoide e rafforzare le condizioni di riflessività e transitività che abbiamo richiesto su una relazione infinitaria introducendo una qualche condizione sulla nuova operazione $\bullet_{\mathcal{S}}$. Se indichiamo con $U \bullet_{\mathcal{S}} V$ il sottoinsieme $\{u \bullet v : u \;\varepsilon_S\; U, v \;\varepsilon_S\; V\}$ di S, la condizione che richiediamo è una debole forma di compatibilità tra $\lhd$ e $\bullet_{\mathcal{S}}$:

(stabilità) $$\frac{a \lhd U \qquad b \lhd V}{a \bullet b \lhd U \bullet V}$$

Visto che l'operazione $\bullet_{\mathcal{S}}$ tra sottoinsiemi è una forma debole di intersezione è abbastanza naturale chiamare *pretopologia* la struttura matematica così ottenuta[5].

In modo analogo a quanto visto nel paragrafo precedente si può ora dimostrare che

(1) $\lhd$ è riflessiva, transitiva e stabile

(2) $\mathcal{F}_{\lhd}$ è un operatore di chiusura stabile, cioè $\mathcal{F}_{\lhd}(U \bullet V) = \mathcal{F}_{\lhd}(\mathcal{F}_{\lhd}(U) \bullet \mathcal{F}_{\lhd}(V))$

(3) $\sim_{\lhd}$ è una congruenza su $\langle \mathcal{P}(S), \bullet, \{1\}, \bigcup\rangle$.

[5]L'uso del nome pretopologia per questa struttura è una piccola generalizzazione sulla definizione usuale in [Sambin 88] dove si assume che l'operazione $\bullet$ sia commutativa, d'altra parte è una generalizzazione che non costa quasi nulla quindi ...

sono equivalenti.

Adesso è facile verificare che

$$\langle Sat(\mathcal{F}), \bullet_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}}, \bigvee \rangle$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) \bullet_{\mathcal{F}} \mathcal{F}(V) &\equiv \mathcal{F}(\mathcal{F}(U) \bullet \mathcal{F}(V)) \\ 1_{\mathcal{F}} &\equiv \mathcal{F}(\{1\}) \\ \bigvee U_i &\equiv \mathcal{F}(\bigcup \mathcal{F}(U_i)) \end{aligned}$$

è un quantale, ma anche in questo caso possiamo fare di più dimostrando che vale anche il viceversa, cioè ogni quantale è isomorfo alla collezione dei saturi di una opportuna pretopologia. Il metodo da usare per dimostrare questo risultato ricalca completamente quanto già fatto nel caso dei reticoli completi.

Possiamo facilmente estendere quanto fatto per i quantale al caso dei locale, o equivalentemente alle algebre di Heyting complete, semplicemente ricordando che un locale altro non è che un quantale in cui l'operazione $\bullet$ è anche commutativa ed idempotente, vale a dire che invece di considerare un monoide abbiamo per struttura di base un semireticolo. Tutto quello che dobbiamo fare allora, a partire da un monoide commutativo $\mathcal{S}$, è di trovare delle condizioni su $\lhd$ tali che, per ogni $U, V \subseteq S$, l'operatore di chiusura $\mathcal{A}_{\lhd}$ associato a $\lhd$ soddisfi anche a

$$\mathcal{A}_{\lhd}(U \bullet V) = \mathcal{A}_{\lhd}(U) \cap \mathcal{A}_{\lhd}(V)$$

Possiamo ottenere questo risultato richiedendo che la copertura soddisfi anche alle seguenti condizioni:

(indebolimento) $$\frac{a \lhd U}{a \bullet b \lhd U}$$

(contrazione) $$\frac{a \lhd U \qquad a \lhd V}{a \lhd U \bullet V}$$

Quanto fatto finora è naturalmente il lavoro di base; resta aperto il problema, più generale, di vedere in quale modo particolari condizioni su un quantale influenzano le condizioni che bisogna imporre sulla relazione di copertura di una opportuna pretopologia in modo che il quantale sia isomorfo ai suoi saturi (anche in questo caso conviene riferirsi a [Battilotti-Sambin 93] per avere maggiori informazioni su quanto è già stato fatto).

3. Teoremi di completezza. L'interesse dei precedenti teoremi di rappresentazione dal punto di vista logico è immediato. Infatti gli usuali teoremi di completezza altro non sono che opportuni teoremi di rappresentazione cui viene eventualmente aggiunta una qualche operazione di quoziente.

In particolare, in questo articolo vale la pena di far vedere come le formule della logica lineare intuizionista [Girard 87] si possano interpretare nei saturi di una pretopologia e quelle della logica intuizionistica nei saturi di una pretopologia con indebolimento e contrazione[6]. Per quanto riguarda la questione della validità di questa interpretazione tutto ciò che dobbiamo fare è ricordare i risultati dei paragrafi precedenti. Supponiamo dunque che $\mathcal{S}$ sia una pretopologia e $\mathcal{F}$ sia l'operatore di chiusura associato alla copertura di $\mathcal{S}$ e definiamo una mappa di valutazione $V(\cdot)$ dall'insieme delle formule della logica lineare proposizionale intuizionista verso la collezione $Sat(\mathcal{F})$ dei saturi di $\mathcal{S}$ ponendo (cfr. [Sambin 88]):

$$
\begin{array}{rlcr}
V(A \otimes B) \equiv \mathcal{F}(V(A) \bullet V(B)) & & & V(1) \equiv \mathcal{F}(1) \\
V(A \;\&\; B) \equiv V(A) \cap V(B) & & & V(\top) \equiv S \\
V(A \oplus B) \equiv \mathcal{F}(V(A) \cup V(B)) & & & V(0) \equiv \mathcal{F}(\emptyset) \\
V(A \rightarrow B) \equiv \{x \in S : \{x\} \bullet V(A) \lhd V(B)\} & & &
\end{array}
$$

[6]Le formule della logica lineare si possono, più in generale, interpretare negli elementi di un opportuno quantale (si vedano ad esempio [Abrusci 91], [Rosenthal 90], [Valentini 92b] e [Yetter 90]) e quelle della logica intuizionistica negli elementi di un locale.

Non è ora difficile dimostrare che se A è un teorema della logica lineare proposizionale intuizionista allora $1 \; \varepsilon_S \; V(A)$. Un po' più difficile è dimostrare che vale anche il viceversa, i.e che se per ogni pretopologia $\mathcal{S}$ si ha che $1 \; \varepsilon_S \; V(A)$ per ogni funzione di valutazione $V(\cdot)$ allora A è un teorema della logica lineare intuizionistica. L'idea giusta (tanto per cambiare!) per dimostrare il teorema di completezza è quella di costruire una particolare pretopologia usando proprio l'insieme delle formule come monoide di base (a meno di qualche ovvia relazione di congruenza tra le formule) ed il connettivo $\otimes$ (*times*) come operazione di monoide (cfr. [Sambin 88]). Invece che usare la notazione originale del lavoro di Sambin, che sembra essere un po' troppo pesante, conviene qui vedere la definizione dell'operatore di chiusura usando quella in [Valentini 91]. Supponiamo di indicare con $[A] \equiv \{C : A \vdash C \text{ e } C \vdash A\}$ la classe di equivalenza di formule equidimostrabili con la formula A nella logica lineare proposizionale intuizionista, allora ponendo

$$[A] \leq [B] \equiv A \vdash B$$

si ottiene nell'algebra di Lindenbaum delle formule una relazione d'ordine tra le (classi di equivalenza delle) formule che risulta essere anche stabile. Indichiamo ora con

$$\downarrow [A] \equiv \{[C] : [C] \leq [A]\}$$

l'insieme delle (classi di equivalenza delle) formule che stanno *sotto* [A]. L'operatore di chiusura stabile $\mathcal{F}$ che cerchiamo è allora quello che manda l'insieme di (classi di equivalenza di) formule U nell'insieme

$$\mathcal{F}(U) \equiv \bigcap\{\downarrow [A] : U \subset \downarrow [A]\}.$$

Una volta dimostrato il teorema di completezza per la logica lineare proposizionale intuizionista non è difficile estenderlo, in modo uniforme, al caso della logica lineare proposizionale classica, al caso non commutativo e al caso con gli esponenziali; ma forse è ancora più interessante notare che la stessa tecnica dimostrativa porta pure ad un teorema di completezza per il calcolo intuizionista e per la logica classica usando una prova intuizionisticamente accettabile. Negli ultimi tempi si è visto come estendere in modo abbastanza naturale la prova al caso predicativo sia nel caso della logica intuizionistica che in quello della logica classica [Sambin 92].

Sistemi topologici e topologia point-free

Uno spazio topologico si può descrivere come una terna

$$\langle X, \mathcal{A}, \Vdash \rangle$$

dove X è la collezione dei punti dello spazio topologico che stiamo considerando, $\mathcal{A}$ è un insieme di aperti della topologia che costituiscono una base per lo spazio topologico e $\Vdash$ è una relazione, da noi aggiunta, che lega gli elementi di X con gli aperti della base $\mathcal{A}$ con l'intento di specificare quando un punto è contenuto in un aperto. Naturalmente nel caso *tradizionale* la relazione $\Vdash$ altro non è che la solita relazione di appartenenza $\in$ e quindi si tratta di una aggiunta del tutto inutile. Tuttavia il caso tradizionale suggerisce quali possono essere le condizioni a cui $\Vdash$ deve soddisfare. Prima di tutto ogni punto è un elemento dell'intera collezione X; inoltre è naturale richiedere che un punto appartenga all'intersezione di due aperti se e solo se appartiene ad entrambi e infine che un punto non possa essere *spezzato* dagli aperti della base. Mentre le prime due condizioni si possono facilmente esprimere imponendo che, per ogni $x \in X$ e $a, b \in \mathcal{A}$, $x \Vdash X$ e $x \Vdash a \cap b$ se e solo se $x \Vdash a$ e $x \Vdash b$, esprimere la terza risulta un po' più complicato. Prima di vedere una possibile soluzione di questo problema conviene guardare le cose da un punto di vista un po' più astratto. È abbastanza noto che un locale esprime in modo algebrico le proprietà richieste sulla struttura degli aperti di uno spazio topologico. Questa considerazione, assieme a quanto abbiamo visto nei precedenti paragrafi, suggerisce che per parlare di uno spazio topologico in modo astratto si possano usare le pretopologie con indebolimento e contrazione che abbiamo già introdotto. In particolare si vede immediatamente che se consideriamo la struttura

$$\langle \mathcal{A}, 1, \bullet, \lhd \rangle$$

dove $\mathcal{A}$ sono gli aperti della base dello spazio topologia $\langle X, \mathcal{A}, \Vdash \rangle$, 1 sta per l'intera collezione X, $\bullet$ sta per l'operazione di intersezione tra aperti di $\mathcal{A}$ e infine $\lhd$ è una relazione tra aperti della base e sottoinsiemi di aperti della base definita da $a \lhd U$ se e solo se $a \subseteq \bigcup U$, quella che otteniamo è appunto una pretopologia in cui valgono indebolimento e contrazione.

Prendendo ora il coraggio a due mani, possiamo abbandonare la nozione standard di spazio topologico costruito sopra una collezione e considerare come struttura di base per una topologia una *qualsiasi* pretopologia con indebolimento e contrazione. A questo punto si è spinti ad esprimere in modo completamente astratto le tre condizioni che abbiamo richiesto a proposito della relazione $\Vdash$ visto che non si può più fare riferimento alla collezione dei punti X. Una soluzione è quella che segue, dove l'ultima condizione dice che se il punto α è contenuto nell'aperto a che è a sua volta coperto dall'insieme di aperti U allora esso è interamente contenuto in uno degli aperti della base che formano U stesso visto che un punto non deve essere spezzato da alcun aperto della base.

$$\alpha \Vdash 1$$

$$\alpha \Vdash a \bullet b \text{ se e solo se } \alpha \Vdash a \text{ e } \alpha \Vdash b$$

$$\frac{\alpha \Vdash a \qquad a \lhd U}{(\exists b\ \varepsilon\ U)\ \alpha \Vdash b}.$$

In questo modo possiamo completamente capovolgere la rilevanza degli *ingredienti* nella descrizione di uno spazio topologico che abbiamo dato all'inizio di questo paragrafo: infatti avevamo già osservato che nell'approccio tradizionale la relazione $\Vdash$ era inutile; ora invece possiamo rendere *inutile* la collezione X dei punti dello spazio topologico, liberandoci così di un oggetto *scomodo* dal punto di vista fondazionale ed entrando nel regno della *topologia senza punti*. Tutto quello che dobbiamo fare è completare la definizione della relazione $\Vdash$. Diremo poi che un punto α è un sottoinsieme di aperti della base tale che le condizioni che abbiamo imposto su $\Vdash$ siano soddisfatte quando si richiede che $a \; \varepsilon \; \alpha \equiv \alpha \Vdash a$. Le condizioni su $\Vdash$ sarebbero già sufficienti se non fosse per il fatto che la condizione di chiusura per intersezione potrebbe portarci ad avere punti che, dal punto di vista intuitivo, dovrebbero essere contenuti nell'intersezione di due aperti disgiunti della base. Allo scopo di evitare che questo succeda introduciamo un nuovo predicato $Pos(a)$ su un elemento a della base che esprima la proprietà che a non è vuoto, vale a dire che abbiamo una *positiva* conoscenza che esso è *abitato*, e imponiamo poi una quarta condizione affinchè un sottoinsieme di aperti della base costituisca un punto:

$$\frac{\alpha \Vdash a}{Pos(a)}.$$

Ci rimangono ora solo da fissare le condizioni sul predicato Pos che, nel linguaggio che abbiamo a disposizione, catturino l'idea che un aperto della base *positivo* è non vuoto:

(monotonia) $$\frac{Pos(a) \qquad a \lhd U}{(\exists b \; \varepsilon \; U) Pos(b)}$$

(positività) $$\frac{Pos(a) \rightarrow a \lhd U}{a \lhd U}$$

Mentre la prima condizione nella lettura da noi suggerita è sostanzialmente ovvia, cioè se l'aperto a contiene un punto ogni aperto che lo contiene conterrà anch'esso un punto, la seconda merita qualche spiegazione in più: essa altro non è che un modo costruttivo di esprimere il fatto che se l'aperto a è vuoto, vale a dire non positivo, allora esso è contenuto in ogni aperto. La struttura che abbiamo così ottenuto, costituita da una pretopologia con indebolimento e contrazione cui è stato aggiunto un predicato di positività, è quindi la controparte formale del concetto di topologia classico e per questo motivo d'ora in avanti ci riferiremo ad essa come *topologia formale*.

Adesso si vede bene che nella definizione di spazio topologico possiamo trascurare la collezione dei punti X che può essere recuperata sotto forma di $Pt(\mathcal{A})$, vale a dire i *punti formali*, cioè i sottoinsiemi di $\mathcal{A}$ che soddisfano le quattro condizioni che abbiamo imposto. Naturalmente uno spazio topologico $\Omega(Pt(\mathcal{A}))$ si può ora recuperare *ricostruendo* sopra $Pt(\mathcal{A})$ una base corrispondente ad $\mathcal{A}$ costituita con i sottoinsiemi $\phi(a)$ in corrispondenza agli aperti $a \in \mathcal{A}$, dove

$$\phi(a) \equiv \{\alpha : a \ \varepsilon \ \alpha\}$$

Purtroppo (o per fortuna ?) non tutto fila liscio e non sempre si ottiene esattamente lo spazio topologico di partenza. Infatti si possono incontrare sostanzialmente due tipi di problemi: da un lato nello spazio topologico di partenza poteva succedere che gli aperti a disposizione non fossero sufficienti per distinguere i punti, il che ha come effetto che i punti formali sono troppo pochi, e dall'altro i principi necessari per garantirsi l'esistenza di un numero sufficiente di punti possono essere non accettabili da un punto di vista costruttivo. Riguardo a quest'ultima questione bisogna infatti considerare che i punti di una topologia formale $\mathcal{A}$ sono in corrispondenza biunivoca con i filtri completamente primi su $Sat(\mathcal{A})$, ad esempio tramite la mappa che manda il punto α nel filtro $\{U \in Sat(\mathcal{A}) : U \cap \alpha \neq \emptyset\}$[7], e non ci sono metodi costruttivamente

[7]Non é niente di nuovo: si tratta della mappa che manda un punto nel filtro

accettabili per ottenere filtri completamente primi[8].

Possiamo esprimere quanto detto sopra in modo un po' più formale estendendo ϕ ad una mappa Φ da $Sat(\mathcal{A})$, cioè gli *aperti* della topologia $\mathcal{A}$, verso $\Omega(Pt(\mathcal{A}))$ ponendo

$$\Phi(U) \equiv \bigcup \{\phi(a) : a \varepsilon U\}$$

e dimostrando che Φ è un isomorfismo se e solo se $\phi(a) \subseteq \Phi(U) \rightarrow a \lhd U$. Questa condizione, che corrisponde a ciò che in letteratura (cfr. [Johnstone 82]) si esprime di solito chiedendo che $\mathcal{A}$ sia *spaziale*, abbia cioè *abbastanza punti*, risulta nel nostro caso estremamente interessante in quanto si può dimostrare che essa è una formulazione equivalente di alcuni principi di base come il teorema di sbarramento, nel caso generale, o il teorema del filtro primo, nel caso delle topologie di Stone che vedremo nel prossimo paragrafo.

1. Spazi di Stone. A partire da questo paragrafo cominceremo ad imporre condizioni su un generico spazio topologico per vedere come queste si riflettano sulle proprietà della relazione di copertura.

Conviene inziare da quello che storicamente è stato il precursore dell'approccio *senza punti* alla topologia, vale a dire il teorema di rappresentazione di Stone. Infatti, anche se il teorema di Stone di solito non è presentato in questo modo, non è difficile riconoscere nella *ricostruzione* dei punti che abbiamo utilizzato la usuale definizione di filtro completamente primo su una struttura algebrica ordinata che sta alla base dei teoremi di rappresentazione delle algebre di Boole tramite ultrafiltri e delle algebre di Heyting tramite filtri primi o, ancora, ravvisare nella nozione di sottoinsieme saturo quella di ideale. Nel nostro approccio alla topologia possiamo

---

degli aperti che lo contengono.

[8] In realtà non è difficile trovare esempi di topologie formali completamente prive di punti [Valentini 93].

quindi collegare i teoremi di presentazione che abbiamo visto nei paragrafi precedenti con i teoremi di rappresentazione di Stone. Un aspetto interessante della nostra particolare caratterizzazione delle topologie senza punti sta nel fatto che la condizione che lega topologia ad algebra è quella che filosoficamente ci si può aspettare: passare dalla topologia all'algebra significa passare dall'infinito al finito, ovvero, usando un piccolo slogan, "Algebra = Topologia + Compattezza". Tramite la notazione che abbiamo introdotto, la richiesta che gli elementi della base siano compatti si può esprimere, in modo molto naturale ed immediato, richiedendo che da ogni ricoprimento di un aperto della base tramite aperti si possa estrarre un sottoricoprimento finito. Questa condizione, chiamata a volte *compattezza locale*, è più forte della semplice compattezza dello spazio topologico che pretende solamente che da ogni ricoprimento dell'unità, cioè dell'intero spazio topologico, si possa estrarre un sottoricoprimento finito. Dal punto di vista tecnico, diremo quindi che una topologia formale è di *Stone* quando

$$a \lhd U \text{ se e solo se } a \lhd U_0 \text{ per qualche } U_0 \subseteq U \text{ finito .}$$

Il fatto che questa sia la definizione corretta si può ora giustificare teoricamente osservando che $\mathcal{A}$ è una topologia di Stone se e solo se $Sat(\mathcal{A})$ è in corrispondenza con gli ideali di un reticolo distributivo; quindi la collezione dei saturi di una topologia formale è direttamente utilizzabile in un teorema di rappresentazione alla Stone dei reticoli distributivi e a posteriori anche di strutture algebriche da essi derivate.

La definizione che abbiamo dato si può facilmente migliorare: infatti è possibile dimostrare che tutte le topologie formali di Stone si possono ottenere fissando a priori la condizione che la copertura avvenga solamente con insiemi finiti, cioè pretendendo che la topologia rispetti le regole ottenute riscrivendo esattamente le regole che abbiamo già dato sulle coperture usando però al posto di $a \lhd U$ con U sottoinsieme qualsiasi solamente $a \lhd \{b_1, \ldots, b_n\}$. Questo significa che una topologia è di Stone se e solo se essa è completamente determinata dalla sua *traccia* sui sottoinsiemi finiti.

Dal punto di vista dell'operatore di chiusura $\mathcal{A}$ associato alla copertura, una topologia di Stone si può caratterizzare richiedendo che $\mathcal{A}$ sia induttivo, cioè

$$\mathcal{A}(U) \equiv \bigcup\{\mathcal{A}(U_0) : U_0 \text{ sottoinsieme finito di } U\}.$$

Ora non è difficile vedere che in questo caso i punti sono in corrispondenza con i filtri primi su $Sat(\mathcal{A})$, a differenza dal caso generale in cui la corrispondenza era con i filtri completamente primi, ma, dal punto di vista fondazionale, questo fatto migliora di poco la situazione e bisognerà aspettare fino al prossimo paragrafo per vedere come costruire una topologia formale in cui la richiesta di *avere abbastanza punti* possa essere soddisfatta senza la necessità di principi costruttivamente difficili da accettare.

2. Domini di Scott e Basi di Informazione. Se portiamo all'estremo la condizione che lo spazio topologico sia localmente compatto, vale a dire se imponiamo che da ogni copertura si possa estrarre una sottocopertura costituita da un solo elemento, quello che otteniamo è uno *spazio topologico di Scott*. Il nome è dovuto al fatto che questa condizione è *sostanzialmente* sufficiente affinchè una topologia formale $\mathcal{A}$ per cui essa vale sia (omeomorfa a) la topologia di Scott sul dominio di Scott $\langle Pt(\mathcal{A}), \subseteq\rangle$, cioè affinchè la definizione assiomatica dei Domini di Scott (cfr. [Scott 81a], [Scott 82]) altro non sia che la nostra caratterizzazione dei punti nel caso di una topologia formale di Scott.

Anche questa volta, come nel caso delle topologie di Stone, abbiamo una semplice caratterizzazione delle topologie di Scott. Infatti $\mathcal{A}$ è una topologia di Scott quando

$a \lhd U$ se e solo se a è non positivo oppure $a \lhd b$ per qualche $b \,\varepsilon\, U$

che si può, più costruttivamente, esprimere ponendo

$$a \lhd U \text{ se e solo se } Pos(a) \to (\exists b\ \varepsilon\ U)\ a \lhd b.$$

Particalarizzando quanto detto nel paragrafo precedente, possiamo dire che una topologia formale è di Scott se e solo se essa è determinata dalla sua *traccia* sugli insiemi con un solo elemento, ovvero sugli elementi della base; equivalentemente si può dire che una topologia è di Scott se e solo se l'operatore di chiusura $\mathcal{A}$ associato alla copertura è tale che $\mathcal{A}(U) = \cup\{\mathcal{A}(a) : a\varepsilon U\}$. A questo punto è facile osservare che i punti su $\mathcal{A}$ sono in corrispondenza con i filtri su $Sat(\mathcal{A})$ e che è intuizionisticamente dimostrabile che nel caso delle topologie di Scott esistono abbastanza punti, cioè che $\Phi : Sat(\mathcal{A}) \to \Omega Pt(\mathcal{A})$ è sempre un isomorfismo.

Le strutture risultanti si possono anche caratterizzare direttamente e sono state da noi chiamate Basi di Informazione [Sambin-Valentini-Virgili 92]. Una *Base di Informazione* $\mathcal{S}$ è una struttura

$$\langle S, \cdot, \Delta, Pos, \lhd \rangle,$$

tale che S sia un insieme, $\cdot$ una operazione associativa, Δ un elemento speciale di S, Pos una proposizione sugli elementi di S e $\lhd$ una relazione binaria tra elementi di S che continueremo a chiamare *copertura*, che soddisfi alle sequenti condizioni per ogni $a, b, c \in S$:

$$Pos(\Delta) \qquad \frac{Pos(a) \qquad a \lhd b}{Pos(b)} \qquad \frac{Pos(a) \to a \lhd b}{a \lhd b}$$

$$a \lhd \Delta \qquad a \lhd a \qquad \frac{a \lhd b \qquad b \lhd c}{a \lhd c}$$

$$\frac{a \lhd b}{a \cdot c \lhd b} \text{ e } \frac{a \lhd b}{c \cdot a \lhd b} \qquad \frac{a \lhd b \qquad a \lhd c}{a \lhd b \cdot c}$$

E' banale accorgersi che quelle che abbiamo scritto non sono altro che le solite regole su una topologia formale specializzate al caso in cui la copertura avvenga utilizzando un solo elemento. Forse un po' meno banale è a questo punto notare che nel caso delle topologie di Scott non abbiamo più bisogno delle relazioni infinitarie e che siamo ritornati a considerare una teoria completamente formalizzabile all'interno della teoria dei tipi originale.

Un aspetto non ovvio di questa definizione è invece il fatto che la relazione di copertura $\lhd$ ammette una interessante interpretazione indipendente dalla caratterizzazione topologica; infatti, supponendo che $a \lhd b$ significhi che a è una informazione su un qualche soggetto (astratto) più precisa dell'informazione b e che $Pos(a)$ significhi che l'informazione a è consistente, è facile verificare che tutte le regole sono soddisfatte in modo *naturale*. Ancora più interessante è notare che anche la nozione di punto ha in questo caso una naturale interpretazione: un punto rappresenta un *concetto*, vale a dire un sottoinsieme completo di informazioni coerenti, o equivalentemente, dal punto di vista matematico, un sottoinsieme di Pos chiuso per $\cdot$ e $\lhd$.

Sebbene esista per le topologie formali una precisa nozione di *mappa continua* [Sambin 87], basandosi su quanto proposto in [Valentini 90] e in [Valentini-Virgili 91] in [Sambin-Valentini-Virgili 92] viene proposta una nozione di mappa tra basi di informazione che rispetta la spiegazione intuitiva che abbiamo dato sopra. Supponiamo che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ siano basi di informazione allora una mappa delle informazioni di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ è una *traduzione* che prende una informazione di $\mathcal{S}$ e la trasforma in una di $\mathcal{T}$. Tuttavia a meno che ci sia una corrispondenza perfetta tra le informazioni di $\mathcal{S}$ e quelle di $\mathcal{T}$ non si può pretendere che la traduzione risulti perfetta, cioè che una informazione di $\mathcal{S}$ sia tradotta in <u>una</u> informazione di $\mathcal{T}$. Possiamo tuttavia approssimare la traduzione di una informazione di $\mathcal{S}$ usando un intero concetto di $\mathcal{T}$, vale a dire un suo sottoinsieme.

Questo è il motivo per cui invece di una funzione preferiamo usare una relazione R tra $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ come nozione di mappa tra basi di informazione, intendendo che, data una informazione $a \in S$ ed una informazione $b \in T$, aRb significa che b sta nella traduzione di a. Le condizioni che imponiamo su R affinchè sia una *traduzione* tra la base di informazione $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ sono allora le seguenti:

$$(1) \qquad aR\Delta_T \quad \frac{aFb \quad aFd}{aFb \cdot d} \quad \frac{aFb \quad b \lhd d}{aFd} \quad \frac{Pos(a) \qquad aFb}{Pos(b)}$$

$$(2) \qquad \frac{a \lhd c \quad cFb}{aFb}$$

$$(3) \qquad \frac{Pos(a) \to aFb}{aFb}$$

Vale la pena di fare qualche commento sulla definizione appena data. Essa dice sostanzialmente che una traduzione è una mappa delle informazioni di S in concetti di T (punto 1) che rispetta $\rhd$ (punto 2) e Pos (punto 3).

Possiamo ora enunciare il teorema principale riguardo le basi di informazione: la categoria delle Basi di Informazione con le traduzioni è equivalente alla categoria dei Domini di Scott con le mappe approssimabili.

Anche in questo caso molto lavoro resta da fare, in particolare nello studio della categoria delle Basi di Informazione che potrebbe essere lo strumento adatto per definire semantiche intuizionisticamente accettabili per vari λ-calcoli tipati o non-tipati di primo ordine o di ordine superiore, ma questa è un'altra storia.

References

[Abrusci 91] V.M. Abrusci, *Phase semantics and sequent calculus for pure non commutative classical propositional linear logic*, Journal of Symbolic Logic **56-4** (1991), 1403-1452.

[Barendregt 84] H. Barendregt, *The lambda calculus, its syntax and semantics*, Studies in Logic and Foundations of Mathematics, North Holland, 1984.

[Bell 88] J.L. Bell, *Toposes and Local Set Theory: an introduction*, Clarendon Press, Oxford, 1988.

[Battilotti-Sambin 93] G. Battilotti, G. Sambin, *Presentazione di quantale con le pretopologie*, in corso di stampa.

[Bossi-Valentini 92] A. Bossi, S. Valentini, *An intuitionistic theory of types with assumptions of high-arity variables*, Annals of Pure and Applied Logic **57** (1992), 93-149.

[Girard 87] J.I. Girard, *Linear Logic*, Theoretical Computer Science **50** (1987), 1-102.

[Johnstone 82] P.T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge studies in advanced mathematics 3., Cambridge University Press, 1982.

[Martin-Löf 82] P. Martin-Löf, *Constructive mathematics and computer programming*, Logic, Methodology and Philosophy of Science VI, L.J.Cohen, J.Los, H.Pfeiffer and K.P.Pedewski eds, North Holland Amsterdam, 1982, pp. 153–175.

[Martin-Löf 83] P. Martin-Löf, *The domain interpretation of type theory*, Workshop on Semantics of Programming Languages, Programming Methodology Group,, Dept. of Computer Science, Chalmesr University of Göteborg, 1983.

[Martin-Löf 84] P. Martin-Löf, *Intuitionistic type theory*, notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980, Bibliopolis, Naples, 1984.

[Nordstrom-Petersson-Smith 90] B. Nordstrom, K. Petersson, J.M. Smith, *Programming in Martin-Löf's Type Theory: an introduction*, Oxford University Press, Oxford, 1990.

[Sambin 87] G. Sambin, *Intuitionistic formal spaces – a first communication*, Mathematical logic and its applications, D. Skordev ed., Plenum, 1987, pp. 187–204.

[Sambin 88] G. Sambin, *Intuitionistic formal spaces and their neighbourhood*, proceedings of Logic Colloquium '88, R Ferro, C. Bonotto, S. Valentini, A. Zanardo ed., North-Holland, 1989, pp. 261–286.

[Sambin 88] G. Sambin, *Intuitionistic formal spaces vs. Scott domains*, Temi e prospettive della logica e della filosofia della scienza contemporanee, vol. I, CLUEB, Bologna, 1988, pp. 159–163.

[Sambin 92] G. Sambin, *Teoremi di completezza uniforme*, 1992.

[Sambin-Valentini 93] G. Sambin, S. Valentini, *Building up a toolbox for Martin-Löf intuitionistic type theory*, in preparazione.

[Sambin-Valentini-Virgili 92] G. Sambin, S. Valentini, P. Virgili, *Scott Domain as a branch of Intuitionistic Pointfree Topology*, in corso di stampa.

[Scott 81a] D.S. Scott, *Lectures on a mathematical theory of computation*, Oxford University Computing Laboratory Tecnical Monograph PRG-19, 1981.

[Scott 81b] D.S. Scott, *Some ordered sets in computer science*, Ordered Sets (ed. I.Rival), Reidel, Dordrechet, 1981, pp. 677–718.

[Scott 82] D.S. Scott, *Domains for denotational semantics*, Automata, Languages and Programming, M. Nielsen and E.M. Schmidt eds., Springer, 1982, pp. 577–613.

[Valentini 90] S. Valentini, *Weak pretopologies and Scott domains*, Atti del XIV Incontro di Logica Matematica di Siena (1990).

[Valentini 92] S. Valentini, *The judgement calculus for intuitionistic linear logic: proof theory and semantics*, Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math., Bd 38 (1992), 39-58.

[Valentini 92a] S. Valentini, *Representation theorems for quantales*, apparirà in Mathematical Logic Quarterly.

[Valentini 92b] S. Valentini, *A simple interpretation of the non-commutative linear logic: the semantics of the ordered relations*, in corso di stampa.

[Valentini 93] S. Valentini, *Points and Co-Points in Formal Topology*, apparirà in Bollettino dell'Unione Matematica Italiana.

[Valentini-Virgili 91] S. Valentini, P. Virgili, *The category of Weak Pretopologies*, Internal Report Dept. Scienze dell'Informazione n.84/91, Milano (1991).

[Virgili 90] P. Virgili, *Una categoria cartesiana chiusa delle topologie formali come modello per λ-calcoli*, Tesi di laurea, Milano (1990).

[Yetter 90] D.N. Yetter, *Quantales and (noncommutative) linear logic*, Journal of Symbolic Logic **55** (1990), 41-64.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova, via G. Belzoni n.7, I-35131 Padova (ITALY)

E-mail address: sambin@pdmat1.unipd.it, valentini@pdmat1.unipd.it