

SERIE DI FOURIER E CENNI AGLI SPAZI DI HILBERT

GIUSEPPE DE MARCO

1. SERIE DI FOURIER

1.1. Richiami sulle funzioni periodiche.

1.1.1. *Traslata di una funzione di una variabile.* Se $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione, ed $a \in \mathbb{R}$, la traslata di f mediante a è la funzione

$$\text{tr}_a f : a + X \rightarrow \mathbb{C}; \quad \text{definita da} \quad \text{tr}_a f(x) = f(x - a), \quad \text{per ogni} \quad x \in a + X.$$

Per una funzione reale il grafico della traslata $\text{tr}_a f$ si ottiene dal grafico di f trasladandolo nel piano con il vettore $(a, 0)$. Si lascia come esercizio la dimostrazione del fatto che $\text{tr}_{a+b} f = \text{tr}_a(\text{tr}_b f)$, per $a, b \in \mathbb{R}$; in particolare $f = \text{tr}_0 f = \text{tr}_{a-a} f = \text{tr}_a(\text{tr}_{-a} f)$.

Definizione. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ ($X \subseteq \mathbb{R}$) si dice periodica di periodo a se per qualche $a \in \mathbb{R}$ non nullo si ha $\text{tr}_a f = f$.

Poichè il dominio $a + X$ di $\text{tr}_a f$ deve in particolare coincidere con il dominio di f si ha che X deve essere invariante per la traslazione di a , cioè si deve avere $a + X = X$. Chiaramente si ha anche $\text{tr}_{-a} f = f$, e se a, b sono periodi per f allora anche $a + b$ è un periodo per f ; considerando 0 come periodo banale si ha che l'insieme $\text{Per}(f)$ dei periodi di una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è un sottogruppo additivo di \mathbb{R} , come è immediato mostrare. Pertanto esso o è denso in \mathbb{R} (come ad esempio accade per la funzione di Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}}$, che ha \mathbb{Q} come gruppo dei periodi) oppure è generato dal suo minimo elemento strettamente positivo τ , il periodo della funzione f ; si ha cioè $\text{Per}(f) = \tau\mathbb{Z}$: ciò è dimostrato in Analisi Uno, 0.4.13.

OSSERVAZIONE. Si può dimostrare che se la funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è misurabile (secondo Lebesgue) ed f ha un gruppo di periodi denso, allora f coincide quasi ovunque su X con una costante (vedi 1.1.2). Per questa ragione, dicendo funzione periodica si intende in generale una funzione con un insieme di periodi $\tau\mathbb{Z}$ discreto, oppure una funzione costante.

Dicendo “ f è periodica di periodo τ ” si intende solo dire che τ è un periodo, non necessariamente il minimo periodo positivo.

1.1.2. L^1_τ . Se $\tau > 0$, indichiamo con L^1_τ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, periodiche di periodo τ , e localmente integrabili secondo Lebesgue. Grazie alla periodicità, l'integrabilità locale equivale all'integrabilità su un qualsiasi intervallo-periodo, cioè un intervallo lungo τ . Mostriamo il seguente fatto (spesso e giustamente ritenuto ovvio; ma una dimostrazione non fa male):

. Se $f \in L^1_\tau$, l'integrale $\int_a^{a+\tau} f(x) dx$ non dipende da a .

Dimostrazione. Sia m il massimo intero per cui $m\tau \leq a$; si ha allora $a < (m+1)\tau \leq a + \tau$; scriviamo

$$\int_a^{a+\tau} f(x) dx = \int_a^{(m+1)\tau} f(x) dx + \int_{(m+1)\tau}^{a+\tau} f(x) dx;$$

se nel secondo integrale si pone $x = \xi + \tau$ si ottiene

$$\int_{(m+1)\tau}^{a+\tau} f(x) dx = \int_{m\tau}^a f(\xi) d\xi;$$

e tornando a scrivere x in luogo di ξ si ottiene

$$\int_a^{a+\tau} f(x) dx = \int_a^{(m+1)\tau} f(x) dx + \int_{m\tau}^a f(x) dx = \int_{m\tau}^{(m+1)\tau} f(x) dx,$$

un ultimo cambiamento di variabile $x = t + m\tau$ mostra infine che si ha

$$\int_{m\tau}^{(m+1)\tau} f(x) dx = \int_0^\tau f(t) dt.$$

□

La misura che si usa per L_τ^1 è quella di Lebesgue divisa per τ . Ogni funzione $f \in L_\tau^1$ ha una *media*, suo integrale su un intervallo-periodo nella misura scelta

$$\mu(f) = \int_{(\tau)} f(x) \frac{dx}{\tau}.$$

Dimostriamo che se τ e T sono entrambi periodi per $f \in L_\tau^1 \cap L_T^1$ allora la media non cambia:

$$\int_0^\tau f(t) \frac{dt}{\tau} = \int_0^T f(x) \frac{dx}{T},$$

di modo che effettivamente si tratta di una quantità legata ad f , indipendente dal periodo attribuito ad f . Ciò è contenuto nel successivo esercizio:

ESERCIZIO 1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica e localmente sommabile. Dimostrare che si ha

$$\mu(f) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r f(x) dx$$

(l'esistenza del limite a secondo membro è parte della tesi; tale limite ovviamente dipende solo da f e non dal numero scelto come periodo, e dimostra quanto voluto).

Risoluzione. Sia $\tau > 0$ un periodo per f . Dato $r > 0$ sia $m_r = [r/\tau]$, parte intera di r/τ , il massimo fra gli interi m tali che $m\tau \leq r$. Si ha:

$$\int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-r}^{-m_r\tau} f(x) dx + \int_{-m_r\tau}^{m_r\tau} f(x) dx + \int_{m_r\tau}^r f(x) dx = 2m_r \int_0^\tau f(x) dx + \int_{-r}^{-m_r\tau} f(x) dx + \int_{m_r\tau}^r f(x) dx;$$

dividendo per $2r$ si ottiene:

$$\frac{1}{2r} \int_{-r}^r f(x) dx = \frac{m_r}{r} \int_0^\tau f(x) dx + \varepsilon(r),$$

dove si è posto

$$\varepsilon(r) = \frac{1}{2r} \left(\int_{-r}^{-m_r\tau} f(x) dx + \int_{m_r\tau}^r f(x) dx \right);$$

è facile mostrare che si ha $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varepsilon(r) = 0$; infatti:

$$\left| \int_{-r}^{-m_r\tau} f(x) dx + \int_{m_r\tau}^r f(x) dx \right| \leq \int_{-r}^{-m_r\tau} |f(x)| dx + \int_{m_r\tau}^r |f(x)| dx \leq 2 \int_0^\tau |f(x)| dx;$$

si noti ora che si ha $r = m_r\tau + \delta_r$, con $0 \leq \delta_r < \tau$ per cui:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_r}{r} = \frac{1}{\tau} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{m_r\tau}{m_r\tau + \delta_r} = \frac{1}{\tau} \lim_{m_r \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \delta_r/(m_r\tau)} = \frac{1}{\tau}.$$

La conclusione è raggiunta. \square

OSSERVAZIONE. Servendosi di questo risultato si vede facilmente che se f è misurabile ed ha un insieme di periodi denso allora f è q.o. costante. Infatti non è restrittivo supporre f limitata (si può sostituirla con $f/(1+|f|)$), in particolare localmente sommabile. Se μ è la media di f si ha

$$\int_0^\tau f(x) dx = \mu\tau,$$

per un insieme di τ denso in \mathbb{R} . Dato che la funzione $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ è continua, si ha $\int_0^x f(t) dt = \mu x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Da questo segue che si ha $\int_I (f(t) - \mu) dt = 0$ per ogni intervallo limitato di \mathbb{R} , il che prova – risultato classico di analisi reale – che $f - \mu$ è q.o. nulla, in altre parole $f = \mu$ quasi ovunque.

Ogni funzione di $f \in L_\tau^1$ ha anche una $\|f\|_1$, norma della convergenza in media di ordine 1:

$$\|f\|_1 = \int_{(\tau)} |f(t)| \frac{dt}{\tau},$$

media del modulo di f .

1.1.3. L^p_τ , per $1 \leq p \leq \infty$. Se $p \geq 1$, ma $p \neq \infty$, indichiamo con L^p_τ l'insieme delle funzioni misurabili τ -periodiche $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tali che $\int_{(\tau)} |f|^p$ esista finito; si dimostra che questo è uno spazio di funzioni e che

$$\|f\|_p = \left(\int_{(\tau)} |f(t)|^p \frac{dt}{\tau} \right)^{1/p}$$

è una norma su tale spazio (a condizione di identificare fra loro funzioni q.o. uguali) che lo rende spazio di Banach. Ci interessa questo fatto essenzialmente per $p = 2$, oltre che per $p = 1$.

Infine L^∞_τ indica l'insieme delle funzioni misurabili τ -periodiche $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ che sono *essenzialmente limitate*, tali cioè che per qualche $\alpha \geq 0$ l'insieme

$$\{|f| > \alpha\} := \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > \alpha\}$$

ha misura di Lebesgue nulla. Si dimostra in tal caso che esiste una minima tale costante $\alpha \geq 0$; questa si chiama *estremo superiore essenziale* di $|f|$, si indica con $\|f\|_\infty$, e sostanzialmente è la sup-norma di f , fatta a meno di insiemi di misura nulla; la convergenza in questa norma è la convergenza uniforme a meno di insiemi di misura nulla.

1.2. Lemma di Riemann–Lebesgue. Vedi Analisi Due, 13.1.

1.2.1. *Non convergenza delle successioni di funzioni fortemente oscillanti.* Un tipico esempio di successione di funzioni limitata ma non puntualmente convergente è la successione $f_n(x) = \cos(nx)$. Vediamo che questo comportamento è tipico delle funzioni periodiche.

Proposizione. *Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ misurabile periodica limitata e non costante. Sia λ_k una successione di reali divergente a $+\infty$. Allora l'insieme*

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{k \rightarrow \infty} p(\lambda_k x) \text{ esiste in } \mathbb{C}\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre p reale; anche, si può assumere che la media di p su un periodo sia nulla (infatti $p(\lambda_k x)$ converge se e solo se converge $p(\lambda_k x) - \mu$). Fissato $a \in \mathbb{R}$ ad arbitrio, sia $E = C \cap [a, a + \tau]$, e sia $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} p(\lambda_k x)$ per $x \in E$, $f(x) = 0$ per $x \notin E$. Si ha allora ovviamente $f \in L^1(\mathbb{R})$, essendo f limitata e con supporto di misura finita. Per il lemma di Riemann–Lebesgue si ha allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) p(\lambda_k x) dx = 0;$$

ma si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x) p(\lambda_k x) = (f(x))^2$; per il teorema della convergenza dominata applicato alla successione di funzioni $x \mapsto f(x) p(\lambda_k x)$ (dominata da $|f| \|p\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$) si ha anche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) p(\lambda_k x) dx = \int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 dx.$$

Ne segue che la funzione positiva f^2 ha integrale nullo, e quindi essa è q.o. nulla, il che implica $f(x) = 0$ q.o.. Se $\nu = \int_{(\tau)} |p(x)| dx / \tau$ si ha, sempre dal lemma di Riemann–Lebesgue

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) |p(\lambda_k x)| dx = \nu \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) dx = \nu \lambda(E);$$

ma poichè per $x \in E$ si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} |p(\lambda_k x)| = |f(x)|$ si ottiene ancora, per convergenza dominata

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) |p(\lambda_k x)| dx = \int_E |f(x)| dx,$$

integrale nullo, dato che $f = 0$ q.o.; da $0 = \nu \lambda(E)$ si trae $\lambda(E) = 0$, non potendo essere $\nu = 0$, perchè per ipotesi p non è costante, e quindi nemmeno q.o. nulla. Quindi C ha misura nulla, avendo intersezione di misura nulla con ogni intervallo quale $[a, a + \tau]$. \square

ESERCIZIO 2. Usando il lemma di Riemann–Lebesgue dimostrare che se una funzione misurabile $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ha un gruppo di periodi $\text{Per}(f)$ denso in \mathbb{R} , allora è q.o. costante.

Risoluzione. Sostituendo p con $p/(1 + |p|)$ si può supporre che p sia limitata. Scelta $f \in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} f = 1$, per ogni periodo positivo $\tau \in \text{Per}(f)$ si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) p(\lambda x) dx = \mu = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau p(x) dx \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau p(x) dx;$$

quindi si ha

$$\int_0^\tau p(x) dx = \mu \tau \quad \text{per ogni } \tau \in \text{Per}(f),$$

e si ragiona come in 1.1.2. □

1.3. Convergenza puntuale.

. **TEOREMA DI CONVERGENZA PUNTUALE** *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periodica di periodo τ e di classe C^1 a tratti. La serie di Fourier di f converge puntualmente ad f dove f è continua, e converge alla media dei limiti destro e sinistro di f sui punti di salto di f .*

Dimostrazione. Scriviamo la ridotta m -esima della serie di Fourier di f calcolata in x :

$$\begin{aligned} S_m f(x) &= \sum_{k=-m}^m c_k(f) e^{i\omega k x} = \sum_{k=-m}^m \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-i\omega k t} e^{i\omega k x} \frac{dt}{\tau} = \\ &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) \left(\sum_{k=-m}^m e^{i\omega k(x-t)} \right) \frac{dt}{\tau} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) D_m(\omega(x-t)) \frac{dt}{\tau} \end{aligned}$$

Se in tale integrale si pone $t = x + \theta$ si ottiene:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) D_m(\omega(x-t)) \frac{dt}{\tau} = \int_{-x-\tau/2}^{-x+\tau/2} f(x+\theta) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x+\theta) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau},$$

dove si usa $D_m(-\omega\theta) = D_m(\omega\theta)$ (parità del nucleo di Dirichlet) e la periodicità delle funzioni per ricondurre l'integrale all'intervallo $[-\tau/2, \tau/2]$. Si è quindi mostrato che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la ridotta m -esima della serie di Fourier di f si scrive

$$S_m f(x) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(x+\theta) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau}, \quad \text{con } D_m(\omega\theta) = \frac{\sin((m+1/2)\omega\theta)}{\sin(\omega\theta/2)}.$$

Fissato ora $a \in \mathbb{R}$, supponiamo di avere il numero complesso $c \in \mathbb{C}$ come candidato per il limite di $S_m f(a)$. Scrivendo

$$S_m f(a) - c = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(a+\theta) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau} - \int_{-\tau/2}^{\tau/2} c D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau} = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (f(a+\theta) - c) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau},$$

si tratta di mostrare che quest'integrale tende a 0; effettuato in esso il cambiamento di variabile $\theta = -t$ si trova (ricordando che D_m è pari)

$$S_m f(a) - c = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (f(a-t) - c) D_m(\omega t) \frac{dt}{\tau},$$

Sommando con l'espressione precedente si ottiene ($t = \theta$ nell'ultimo integrale)

$$2(S_m f(a) - c) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau},$$

e si tratta di mostrare che quest'ultima espressione è infinitesima per $m \rightarrow \infty$.

Una condizione sufficiente è quella di Dini:

. **CONDIZIONE DI DINI** *Se esiste $\delta > 0$ tale che la funzione*

$$\theta \mapsto \frac{f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c}{\theta} \quad \text{appartiene a } L^1([0, \delta]),$$

allora si ha $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m f(a) = c$.

Tale condizione in realtà è equivalente alla richiesta che la funzione $\theta \mapsto (f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c)/\theta$ appartenga ad $L^1([-\tau/2, \tau/2])$: infatti tale funzione è dispari, e chiaramente appartiene ad $L^1([\delta, \tau/2])$ (l'intervallo $[\delta, \tau/2]$ ha misura finita, e quindi la costante $2c$ sta in $L^1([\delta, \tau/2])$; e le funzioni $\theta \mapsto f(a \pm \theta)$ stanno per ipotesi in $L^1([\delta, \tau/2])$). Dopo di ciò la dimostrazione è conseguenza immediata del lemma di Riemann–Lebesgue:

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} (f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c) D_m(\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau} =$$

$$\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \frac{f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c}{\theta} \frac{\theta}{\sin(\omega\theta/2)} \sin((m+1/2)\omega\theta) \frac{d\theta}{\tau};$$

Si osserva che la funzione $\theta \mapsto \theta/\sin(\omega\theta/2)$ si prolunga ad una funzione continua sull'intervallo $[-\tau/2, \tau/2]$; ne segue che la funzione

$$\theta \mapsto \frac{f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c}{\theta} \frac{\theta}{\sin(\omega\theta/2)}$$

prodotto della funzione $\theta \mapsto (f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c)/\theta$, che sta in $L^1([-\tau/2, \tau/2])$ con la funzione continua limitata $\theta \mapsto \theta/\sin(\omega\theta/2)$, appartiene ad $L^1([-\tau/2, \tau/2])$. Il lemma di Riemann–Lebesgue si applica per dire che l'integrale tende a 0.

Si osservi che se f ha in a limiti destro e sinistro, e i "rapporti incrementali" $(f(a+t) - f(a^+))/t$, $(f(a-t) - f(a^-))/(-t)$ si mantengono limitati per $0 < t \leq \delta$, allora la funzione (dove $c = (f(a^+) + f(a^-))/2$)

$$\frac{f(a+\theta) + f(a-\theta) - 2c}{\theta} = \frac{f(a+\theta) - f(a^+)}{\theta} + \frac{f(a-\theta) - f(a^-)}{\theta},$$

somma di funzioni limitate, si mantiene limitata in $]0, \delta]$, e quindi sta certamente in $L^1(]0, \delta])$. Ogni funzione di classe C^1 a tratti, in particolare, verifica la condizione di Dini in ogni punto. \square

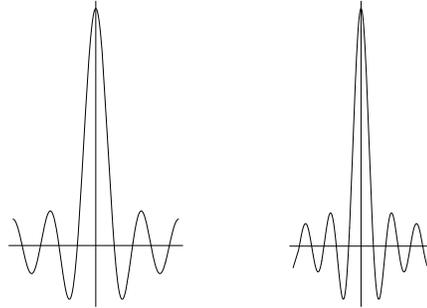


FIGURA 1. Grafici di D_4 e D_5 (periodo 2π , su $[-\pi, \pi]$).

1.4. Alcuni esempi.

1.4.1.

ESERCIZIO 3. Sia $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f_\alpha(x) = e^{i\alpha x}$ per $x \in]-\pi, \pi]$, prolungata poi in periodicità 2π . Tracciarne il grafico nel caso $\alpha = i$. Scriverne la serie di Fourier in forma complessa e dedurne lo sviluppo (di Mittag–Leffler) della funzione $\cot(\pi\alpha)$ in serie di frazioni semplici.

Risoluzione. Si ha

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)x} dx;$$

e dato che per ipotesi si ha sempre $\alpha \neq n$ si ottiene:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(\alpha-n)x}}{i(\alpha-n)} \right]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi}}{i(\alpha-n)} = \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \frac{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}}{2i} = \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \sin(\pi\alpha).$$

La funzione f_α è chiaramente di classe C^1 a tratti. Quindi si ha

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \sin(\pi\alpha) e^{inx} \quad x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z},$$

cioè dove f_α è continua; per $x = \pi + 2k\pi$ si ha

$$\frac{f_\alpha(\pi^+) + f_\alpha(\pi^-)}{2} = \frac{e^{-i\alpha\pi} + e^{i\alpha\pi}}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \sin(\pi\alpha) e^{in\pi} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha-n},$$

da cui lo sviluppo della cotangente

$$\pi \cot(\pi\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha-n} \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Attenzione: la serie bilatera a secondo membro converge se sommata simmetricamente, e la sua ridotta m -esima coincide con la ridotta di una serie assolutamente convergente:

$$\sum_{n=-m}^m \frac{1}{\alpha - n} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^m \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

ridotta m -esima della serie

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

la quale converge assolutamente (e totalmente sui compatti di \mathbb{C} disgiunti da \mathbb{Z}) alla funzione $\pi \cot(\pi\alpha)$. Ma nessuna delle due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha - n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha + n}$$

converge, per nessun $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. □

ESERCIZIO 4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x - \pi)^2$ per $x \in [0, 2\pi[$, e prolungata poi in periodo 2π ad \mathbb{R} . Calcolarne la serie di Fourier complessa e quella reale, e discutere la convergenza.

Risoluzione. La serie di Fourier complessa è presto calcolata:

$$c_0(f) = \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{6\pi} [(x - \pi)^3]_0^{2\pi} = \frac{\pi^3 - (-\pi)^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

mentre per $n \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} 2\pi c_n(f) &= \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 e^{-inx} dx = \left[\frac{e^{-inx}}{-in} (x - \pi)^2 \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} 2(x - \pi) e^{-inx} dx = \\ &= \frac{2}{(in)(-in)} \left([e^{-inx}(x - \pi)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} e^{-inx} dx \right) = \frac{2}{n^2} (\pi - (-\pi)) = \frac{4\pi}{n^2}, \end{aligned}$$

da cui

$$c_n(f) = \frac{2}{n^2} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

La serie di Fourier di f in forma complessa è quindi

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{2}{n^2} e^{inx},$$

ed accoppiando n con $-n$ si trova subito la serie in forma reale:

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx).$$

Si noti che le due serie sono totalmente convergenti, e per il teorema di convergenza puntuale convergono per ogni $x \in \mathbb{R}$ ad $f(x)$, dato che f è continua e di classe C^1 a tratti. Riportiamo di seguito il grafico di f , insieme con il grafico della ridotta di ordine 3 della serie di Fourier di f .

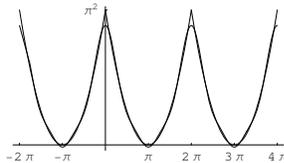


FIGURA 2. Grafico di f e di S_3f .

Si noti che per $x = 0$ si ottiene

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \quad \text{da cui} \quad \zeta(2) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Si consiglia di esercitarsi con le successive funzioni calcolando i coefficienti di Fourier.

1.5. **Alcuni esempi.** Funzione $f(x) = \operatorname{sgn} x$, segno di x , per $x \in [-\pi, \pi[$, prolungata in periodicità 2π ad \mathbb{R} (onda quadra):

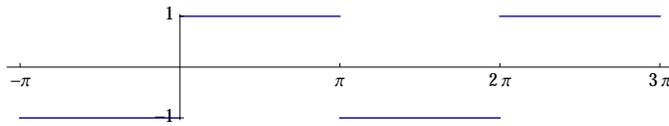


FIGURA 3. Grafico di f .

La serie di Fourier di f è

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

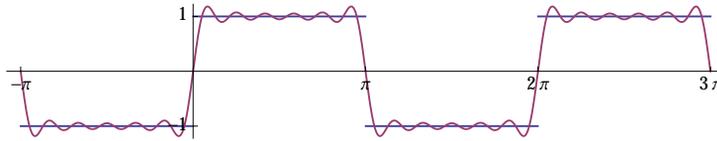


FIGURA 4. Grafico di f e della ridotta di ordine 5 della sua serie di Fourier.

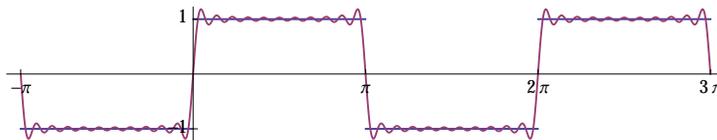


FIGURA 5. Grafico di f e della ridotta di ordine 10 della sua serie di Fourier.

Serie di Fourier di $f(x) = \max\{-x, 0\}$ per $x \in [-\pi, \pi[$:

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nx) + \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx) \right).$$

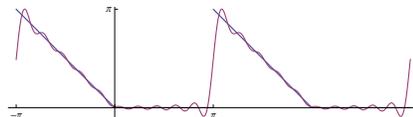


FIGURA 6. Grafico di $f(x) = \max\{-x, 0\}$ e ridotta di ordine 10 della serie di Fourier

Serie di Fourier di $f(x) = x$ per $x \in [-2, 2[$, prolungata in periodo 4 (onda a dente di sega):

$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x/2).$$

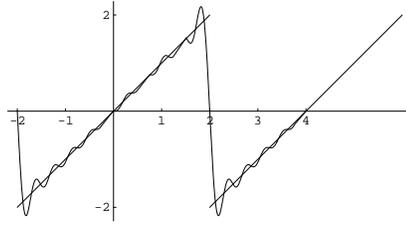


FIGURA 7. Grafico di $f(x) = x$ in $[-2, 2[$, prolungata in periodo 4, e ridotta di ordine 10 della serie di Fourier.

Serie di Fourier di $f(x) = x^2$ per $x \in [0, 2\pi[$, prolungata in periodo 2π :

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{k^2} \cos(kx) - \frac{4\pi}{k} \sin(kx) \right).$$

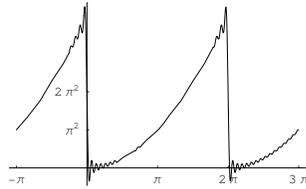


FIGURA 8. Ridotta di ordine 30 della serie di Fourier.

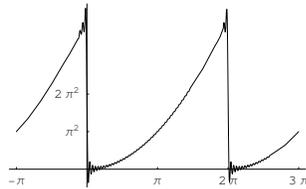


FIGURA 9. Ridotta di ordine 50 della serie di Fourier.

1.5.1. *Coefficienti di Fourier della traslata.* Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ha periodo τ , ed $a \in \mathbb{R}$, la traslata $\text{tr}_a f$ ha ancora periodo τ , ed i coefficienti di Fourier della traslata sono;

$$c_n(\text{tr}_a f) = \int_0^\tau f(t-a) e^{-in\omega t} \frac{dt}{\tau} = \int_{-a}^{\tau-a} f(\theta) e^{-in\omega(\theta+a)} \frac{d\theta}{\tau} = e^{-in\omega a} c_n(f),$$

cioè

$$c_n(\text{tr}_a f) = e^{-in\omega a} c_n(f).$$

Se supponiamo ora che a sia un altro periodo per f , cioè che sia $\text{tr}_a f = f$, allora la formula precedente diventa $c_n(f) = e^{-in\omega a} c_n(f)$, che implica $c_n(f) = 0$, oppure $e^{-in\omega a} = 1$. Quest'ultima possibilità si verifica se e soltanto se $n\omega a = 2k\pi = k\omega\tau$ con $k \in \mathbb{Z}$, e cioè se e solo se $na = k\tau$. In particolare, se f ha un periodo τ/p , con $p > 1$ intero, si ha $c_n(f) = 0$ se n non è multiplo di p , mentre per i multipli di p si ha:

$$c_{kp}(f, \tau) = c_k(f, \tau/p),$$

avendo indicato con $c_n(f, \tau)$ lo n -esimo coefficiente di Fourier di f pensata come funzione di periodo τ (in particolare se f ha un periodo τ/p strettamente più piccolo di τ , con $p \geq 2$ intero, tutte le armoniche non multiple di p sono nulle).

2. TEORIA IN L^2_τ

2.1. **Brevi richiami su $L^p_\mu(X, \mathbb{C})$.** Facciamo qui una breve ripetizione di alcune nozioni di teoria dell'integrazione utili per proseguire. In realtà per questo corso saranno indispensabili soltanto gli spazi con misura seguenti: \mathbb{R} , e talvolta \mathbb{R}^2 con la ordinaria misura di Lebesgue; e gli intervalli compatti di \mathbb{R} con la misura indotta, eventualmente divisa per la lunghezza dell'intervallo (vedi 2.1.4). Una volta useremo anche gli spazi con misura discreti (vedi 2.1.5). Più che la conoscenza dell'integrale di Lebesgue occorre la conoscenza degli enunciati dei teoremi che esso genera, convergenza dominata e convergenza monotona, ed i teoremi di Fubini e Tonelli per gli integrali doppi: bisogna imparare ad usare agevolmente questi teoremi.

2.1.1. *Spazio con misura.* Supponiamo assegnato uno spazio con misura (X, \mathcal{S}, μ) , dove cioè X è un insieme, \mathcal{S} è una σ -algebra di parti di X , e $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura positiva su \mathcal{S} (funzione numerabilmente additiva e nulla su \emptyset). Sono allora definite le funzioni misurabili $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ (quelle funzioni tali che $f^{-1}(V) \in \mathcal{S}$ per ogni aperto V di \mathbb{C}), gli integrali delle funzioni misurabili positive (finiti oppure $+\infty$), le funzioni $f \in L^1_\mu(X, \mathbb{C}) = L^1_\mu(X)$, quelle il cui modulo ha integrale finito su X , ed i loro integrali

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x),$$

ed $L^1_\mu(X)$ è uno spazio vettoriale, su cui la funzione

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu$$

è una seminorma, che diviene norma identificando con 0 le funzioni q.o. nulle. Si sa che con tale norma $L^1_\mu(X)$ è spazio di Banach, cioè è completo. Ricordiamo rapidamente cosa sia $L^\infty_\mu(X, \mathbb{C})$: sono le funzioni misurabili $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ essenzialmente limitate, tali cioè che

$$\|f\|_\infty = \inf\{\alpha \geq 0 : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0\}$$

sia finito. Si vede facilmente che anche $L^\infty_\mu(X)$ è spazio di Banach nella norma $\|\cdot\|_\infty$, che è la *norma della convergenza uniforme quasi ovunque*. Fissato il numero reale $p > 0$ si definisce, per ogni funzione misurabile f :

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

dove è sottinteso che se $|f|^p \notin L^1_\mu$ allora $\|f\|_p = \infty$. Indichiamo con $L^p_\mu(X, \mathbb{C}) = L^p_\mu(X)$ l'insieme delle f misurabili per cui $\|f\|_p < \infty$. Ovviamente per $p = 1$ si riottiene L^1 . Osserviamo che $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, banalmente.

2.1.2. L^2 . A noi interessa il caso $p = 2$ (ma in analisi reale tutti i casi $p \geq 1$ hanno qualche interesse). Per lo studio di L^2_μ il seguente risultato, molto importante e da tenere sempre presente, è indispensabile:

. **DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ PER GLI INTEGRALI** *Se $f, g \in L^2_\mu(X)$ allora $fg \in L^1_\mu(X)$, ed inoltre*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Dimostrazione. Se $\|f\|_2 = 0$, oppure $\|g\|_2 = 0$, allora f oppure g sono q.o. nulli ed ambo i membri della disuguaglianza sono nulli. Ricordiamo ora la seguente disuguaglianza (la media geometrica è minore o uguale della media aritmetica): se $a, b \geq 0$ allora $ab \leq (a^2 + b^2)/2$. Considerando $a = |f(x)|/\|f\|_2$, $b = |g(x)|/\|g\|_2$ si ottiene, per ogni $x \in X$:

$$\frac{|f(x)| |g(x)|}{\|f\|_2 \|g\|_2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{|f(x)|^2}{\|f\|_2^2} + \frac{|g(x)|^2}{\|g\|_2^2} \right);$$

La funzione misurabile positiva a primo membro è dominata da una funzione di L^1_μ e quindi appartiene pure ad L^1_μ ; integrando ambo i membri si ottiene

$$\frac{1}{\|f\|_2 \|g\|_2} \int_X |fg| d\mu \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|f\|_2^2} \int_X |f|^2 d\mu + \frac{1}{\|g\|_2^2} \int_X |g|^2 d\mu \right) = 1,$$

e si conclude. □

Corollario. **DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI.** *Se $f, g \in L^2_\mu(X)$, allora $f + g \in L^2_\mu(X)$, ed inoltre*

$$\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2.$$

Dimostrazione. Si ha

$$|f + g|^2 \leq (|f| + |g|)^2 = |f|^2 + 2|f||g| + |g|^2;$$

a secondo membro tutte le funzioni stanno in L^1 (la funzione $|f||g|$ grazie a quanto appena visto), quindi il primo membro sta in L^1_μ e si ha

$$\int_X |f + g|^2 d\mu \leq \int_X |f|^2 d\mu + 2 \int_X |f||g| d\mu + \int_X |g|^2 d\mu = \|f\|_2^2 + 2\|fg\|_1 + \|g\|_2^2;$$

ma da $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$ si trae

$$\|f\|_2^2 + 2\|fg\|_1 + \|g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2 \|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2;$$

si è quindi ottenuto

$$\|f + g\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2,$$

ed estremo le radici quadrate si conclude. \square

2.1.3. *Esempi.* Lo spazio $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ dei reali con la ordinaria misura di Lebesgue è naturalmente uno dei più importanti. In questo spazio non ci sono inclusioni tra $L^1(\mathbb{R})$ ed $L^2(\mathbb{R})$. Ad esempio la funzione $x \mapsto 1/(1 + |x|)$ appartiene ad $L^2(\mathbb{R})$ ma non ad $L^1(\mathbb{R})$, mentre invece la funzione $f : x \mapsto 1/(|x|(1 + \log^2 |x|))$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ (calcolarne la norma $\|f\|_1$), ma non sta in $L^2(\mathbb{R})$, dimostrarlo.

ESERCIZIO 5. Mostrare che la funzione $f(x) = \sin x/x$ sta in $L^2(\mathbb{R})$, e calcolare $\|f\|_2$; mostrare anche che $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

Sugli spazi con misura totalmente finita ($\mu(X) < \infty$) si ha invece che gli L^p decrescono al crescere di p , con norme che diventano sempre più stringenti: ci limitiamo ai casi $p = 1, 2, \infty$ e dimostriamo che

• Sia (X, \mathcal{S}, μ) spazio con misura totalmente finita ($\mu(X) < \infty$). Allora si ha

$$L^1_\mu(X) \supseteq L^2_\mu(X) \supseteq L^\infty_\mu(X);$$

inoltre

$$\|f\|_1 \leq \sqrt{\mu(X)} \|f\|_2; \quad \|f\|_2 \leq \sqrt{\mu(X)} \|f\|_\infty; \quad \|f\|_1 \leq \mu(X) \|f\|_\infty.$$

Dimostrazione. Le ultime due disuguaglianze sulle norme sono banali e lasciate al lettore. Per la prima: data $f \in L^2_\mu$, si nota che anche la costante 1 sta in L^2_μ , dato che $\mu(X) < \infty$; per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha allora che $f = f \cdot 1$ sta in L^1_μ , ed inoltre

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \|1\|_2 = \|f\|_2 \left(\int_X 1^2 d\mu \right)^{1/2} = \sqrt{\mu(X)} \|f\|_2.$$

2.1.4. *Spazi di funzioni periodiche.* Gli spazi L^1_τ , L^2_τ , L^∞_τ non sono a rigore spazi di funzioni misurabili su spazi con misura, almeno così come li abbiamo definiti; sono tuttavia identificabili con $L^1([a, a + \tau])$, $L^2([a, a + \tau])$ per ogni fissato $a \in \mathbb{R}$, a condizione di dividere per τ la misura indotta da quella di Lebesgue sull'intervallo stesso; quindi si ha $L^\infty_\tau \subseteq L^2_\tau \subseteq L^1_\tau$, e per le norme:

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_\infty;$$

corrispondentemente la convergenza uniforme implica quella in L^2 , che a sua volta implica quella in L^1 . Naturalmente si può prendere il circolo $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, e pensarlo come spazio con misura, con la lunghezza d'arco divisa per 2π come misura; gli spazi L^p_τ sono identificabili allora con gli spazi $L^p(\mathbb{U})$, e l'integrale su \mathbb{U} si scrive

$$\int_{\mathbb{U}} f(z) \frac{dz}{2\pi iz} \left(= \int_a^{a+\tau} f(e^{i\omega t}) \frac{dt}{\tau} \right) \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}.$$

\square

2.1.5. *Misure discrete.* Infine, per noi sarà significativo (sia pure una volta sola!) lo spazio con misura $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \kappa)$, dove κ è la misura cardinale, numero dei punti dell'insieme se questo è finito, e $+\infty$ altrimenti. In questo caso gli integrali sono le sommatorie, per meglio dire le somme di serie assolutamente convergenti. Si scrive $\ell^p(\mathbb{Z})$ in luogo di $L^p_\kappa(\mathbb{Z})$; le funzioni di $\ell^1(\mathbb{Z})$ sono le successioni bilatere con serie associate assolutamente convergenti; vedi Analisi Due 2.2.6.

2.1.6. *Prodotto scalare hermitiano in $L^2_\mu(X, \mathbb{C})$.* Si definisce una forma hermitiana $(\cdot | \cdot) : L^2_\mu(X, \mathbb{C}) \times L^2_\mu(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo

$$(f|g) = \int_X f \bar{g} = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

La definizione ha significato dato che $x \mapsto f(x) \overline{g(x)}$ sta in $L^1_\mu(X)$ grazie alla disuguaglianza di Cauchy–Schwarz per gli integrali 2.1.2. Tale prodotto è bi-additivo, lineare nella prima variabile, coniugato lineare nella seconda, ed è definito positivo, nel senso che $(f|f) \geq 0$ per ogni $f \in L^2_\mu(X, \mathbb{C})$, ed $(f|f) = 0$ se e solo se $f(x) = 0$ per quasi ogni $x \in X$.

2.2. Spazi di Hilbert.

2.2.1. *Spazi a prodotto scalare.* Si veda Analisi Due, 2,2; studiare bene la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz astratta, e la conseguente disuguaglianza triangolare.

(TEOREMA DI PITAGORA). *Se H è spazio a prodotto scalare e (u_1, \dots, u_m) è una famiglia finita ortogonale di vettori di H si ha*

$$|u_1 + \dots + u_m|^2 = |u_1|^2 + \dots + |u_m|^2.$$

Dimostrazione. È solo un calcolo:

$$\left| \sum_{j=1}^m u_j \right|^2 = \left(\sum_{j=1}^m u_j \mid \sum_{k=1}^m u_k \right) = \sum_{j,k=1}^m (u_j \mid u_k) = \sum_{\ell=1}^m (u_\ell \mid u_\ell) = \sum_{\ell=1}^m |u_\ell|^2. \quad \square$$

2.2.2. *Proiezione ortogonale.* (Sostituisce Analisi Due, 13.13)

Osserviamo anzitutto:

• *Sia H uno spazio a prodotto scalare.*

- (i) *Sia $x \in H$, e sia $L = c + \mathbb{K}v = \{c + \lambda v : \lambda \in \mathbb{K}\}$, con v vettore non nullo di H , la retta affine di H che passa per c ed ha la direzione di v . Esiste un unico punto $y \in L$ per cui $|x - y| = \text{dist}(x, L)$; tale punto è quello per cui $x - y$ è ortogonale a v .*
- (ii) *Sia V sottospazio vettoriale nello spazio a prodotto scalare H , e sia $x \in H$. Un vettore $y \in V$ realizza la minima distanza per x da V (cioè è tale che sia $|x - y| = \text{dist}(x, V) = \inf\{|x - b| : b \in V\}$) se e solo se $x - y$ è ortogonale a V (che significa: $(x - y \mid v) = 0$ per ogni $v \in V$); se esiste, tale y è unico, e si chiama *proiezione ortogonale* di x su V .*

Dimostrazione. (i) Il punto $y \in L$ è tale che $x - y$ è ortogonale a v se e solo se

$$\begin{aligned} (x - y \mid v) = 0 &\iff (x - c - \lambda v \mid v) = 0 \iff (x - c \mid v) - \lambda |v|^2 = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{(x - c \mid v)}{|v|^2}; \end{aligned}$$

quindi y esiste ed è unico. È poi chiaro che y realizza la minima distanza di x da L ; ogni punto della retta si scrive anche $y + \alpha v$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ e si ha $|x - (y + \alpha v)|^2 = |(x - y) - \alpha v|^2 = |x - y|^2 + |\alpha|^2 |v|^2$, espressione minima solo per $\alpha = 0$.

(ii) Se $x - y$ è ortogonale a V , allora chiaramente y realizza la minima distanza, essendo $|x - (y + v)|^2 = |(x - y) - v|^2 = |x - y|^2 + |v|^2$, minima al variare di $v \in V$ se e solo se $v = 0$. Viceversa se y realizza la minima distanza per x da V , e $v \in V$, con $v \neq 0$, y realizza anche la minima distanza dalla retta affine per y , $y + \mathbb{K}v$ che è contenuta in V , e per (i) tale retta è ortogonale a $x - y$; in altre parole $x - y$ è ortogonale a v , arbitrario vettore di V , come si voleva. \square

Se V ha dimensione finita, ed u_1, \dots, u_m è una base ortonormale per V , è facile scrivere esplicitamente la proiezione ortogonale di x su V : essa è

$$p_V(x) = \sum_{k=1}^m (x \mid u_k) u_k.$$

Infatti, ciò equivale a dire che $x - p_V(x)$ è ortogonale a V , e cioè ad ogni vettore di V : per linearità, ciò a sua volta equivale a dire che $x - p_V(x)$ è ortogonale ai vettori di una base di V , e cioè ad u_j , per ogni $j = 1, \dots, m$. Essendo, per $j = 1, \dots, m$:

$$(x - p_V(x) \mid u_j) = (x \mid u_j) - (p_V(x) \mid u_j) = (x \mid u_j) - \sum_{k=1}^m ((x \mid u_k) u_k \mid u_j)$$

$$\begin{aligned}
&= (x | u_j) - \sum_{k=1}^m (x | u_k)(u_k | u_j) = (x | u_j) - \sum_{k=1}^m (x | u_k)\delta_{kj} \\
&= (x | u_j) - (x | u_j) = 0,
\end{aligned}$$

la conclusione è raggiunta.

Sia ora $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ famiglia ortonormale di vettori dello spazio a prodotto scalare H ; sia $x \in H$ fissato.

Per ogni sottoinsieme finito F di Λ si ha la proiezione ortogonale di x sul sottospazio di dimensione finita V_F che ha $(e_\lambda)_{\lambda \in F}$ come base, $p_F(x) = \sum_{\lambda \in F} (x | e_\lambda) e_\lambda$. Si ha quindi, essendo $|x - p_F(x)|^2 = (\text{dist}(x, V_F))^2 \geq 0$, e $|x|^2 = |x - p_F(x)|^2 + |p_F(x)|^2$:

$$|p_F(x)|^2 = |x|^2 - (\text{dist}(x, V_F))^2 \leq |x|^2$$

per ogni sottoinsieme finito F di Λ ; e dato che gli e_λ sono famiglia ortonormale si ha

$$|p_F(x)|^2 = \sum_{\lambda \in F} |(x | e_\lambda)|^2 \leq |x|^2.$$

Facciamo ora la seguente convenzione: se $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di numeri reali positivi poniamo, per definizione:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda := \sup \left\{ \sum_{\lambda \in F} a_\lambda : F \subseteq \Lambda, F \text{ finito} \right\},$$

estremo superiore delle somme sui sottoinsiemi finiti di Λ . Si ha allora:

Proposizione. *Sia H spazio a prodotto scalare, sia $(e_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ famiglia ortonormale in H , e sia $x \in H$. Allora vale la:*

DISUGUAGLIANZA DI BESSEL

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x | e_\lambda)|^2 \leq |x|^2.$$

Vale inoltre la

IDENTITÀ DI PARSEVAL

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x | e_\lambda)|^2 = |x|^2$$

se e solo se x appartiene alla chiusura dello spazio generato dai vettori e_λ .

Dimostrazione. (i) Si è appena visto che si ha

$$|p_F(x)|^2 = \sum_{\lambda \in F} |(x | e_\lambda)|^2 \leq |x|^2$$

per ogni sottoinsieme finito F di Λ , quindi si ha subito che $|x|^2$ maggiore anche il minimo maggiorante delle somme finite:

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x | e_\lambda)|^2 \leq |x|^2.$$

(ii) (*dimostrazione facoltativa; è obbligatoria quella dopo su Parseval*) Come sopra osservato, per ogni sottoinsieme finito F di Λ si ha anche

$$0 \leq |x|^2 - \sum_{\lambda \in F} |(x | e_\lambda)|^2 = (\text{dist}(x, V_F))^2,$$

dove V_F è lo spazio vettoriale generato da $\{e_\lambda : \lambda \in F\}$. Se V è lo spazio vettoriale generato da $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ si ha $\text{dist}(x, V_F) \geq \text{dist}(x, V)$ dato che $V_F \subseteq V$; pertanto

$$0 \leq (\text{dist}(x, V))^2 = |x|^2 - \sum_{\lambda \in F} |(x | e_\lambda)|^2 = (\text{dist}(x, V_F))^2 (= |x - p_F(x)|^2);$$

osserviamo ora che si ha $\text{dist}(x, V) = \inf\{\text{dist}(x, V_F) : F \subseteq \Lambda, F \text{ finito}\}$; infatti, per definizione si ha $\text{dist}(x, V) = \inf\{|x - z| : z \in V\}$; ogni $z \in V$ è combinazione lineare finita di elementi di $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, cioè esiste un sottoinsieme finito F di Λ , e coefficienti $\xi_\alpha \in \mathbb{K}$ tali che $z = \sum_{\lambda \in F} \xi_\lambda e_\lambda \in V_F$; si ha quindi

$$|x - z| \geq \text{dist}(x, V_F) \geq \text{dist}(x, V),$$

provando che si ha $\text{dist}(x, V) = \inf\{\text{dist}(x, V_F) : F \subseteq \Lambda, F \text{ finito}\}$. Ne segue:

$$(\text{dist}(x, V))^2 = \inf\{|x|^2 - \sum_{\lambda \in F} |(x | e_\lambda)|^2 : F \subseteq \Lambda, F \text{ finito}\} = |x|^2 - \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x | e_\lambda)|^2.$$

Si è provato che vale l'identità di Parseval se e solo se $\text{dist}(x, V) = 0$; poichè il luogo degli zeri della funzione $\text{dist}(\cdot, V)$ è la chiusura \bar{V} di V , si conclude. \square

2.2.3. *Serie di Fourier.* Vediamo di ripetere l'identità di Parseval nel caso particolare per noi di maggiore interesse, quello di L^2_τ , con l'insieme ortonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dei caratteri di periodo τ , $e_n(x) = e^{in\omega x}$, dove $\omega = 2\pi/\tau$. Consideriamo gli insiemi finiti $F_m = \{n \in \mathbb{Z} : -m \leq n \leq m\}$, al variare di $m \in \mathbb{N}$; lo spazio vettoriale V_m generato da $\{e_n : n \in F_m\}$ si chiama spazio dei *polinomi trigonometrici di grado m* ; ha dimensione complessa $2m + 1$. La proiezione ortogonale di una funzione $f \in L^2_\tau$ su V_m è:

$$p_m(f) = \sum_{n=-m}^{n=m} (f | e_n) e_n = \sum_{n=-m}^{n=m} c_n(f) e_n \quad \text{dove} \quad c_n(f) = (f | e_n) = \int_{(\tau)} f(t) e^{-in\omega t} \frac{dt}{\tau},$$

esattamente la ridotta m -esima $S_m f$ della serie di Fourier di f . Sia V lo spazio di tutti polinomi trigonometrici, di ogni possibile grado; si ha esattamente $V = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} V_m$; V è lo spazio vettoriale su \mathbb{C} generato da $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Dato che $V_m \subseteq V$ si ha $\text{dist}(f, V_m) \geq \text{dist}(f, V)$; quindi

$$(*) \quad \|f\|_2^2 - \sum_{n=-m}^{n=m} |c_n(f)|^2 = (\text{dist}(f, V_m))^2 = \|f - S_m f\|_2^2 \geq (\text{dist}(f, V))^2,$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$. Si ha ora

$$\text{dist}(f, V) = \inf\{\text{dist}(f, V_m) : m \in \mathbb{N}\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{dist}(f, V_m).$$

Infatti essendo $V_m \subseteq V_{m+1}$ si ha $\text{dist}(f, V_m) \geq \text{dist}(f, V_{m+1})$; cioè, la successione $\text{dist}(f, V_m)$ è decrescente e quindi converge all'estremo inferiore dell'insieme dei suoi termini; e tale estremo inferiore è esattamente $\text{dist}(f, V)$, dato che per definizione $\text{dist}(f, V) = \inf\{\|f - g\|_2; g \in V\}$, ma ogni $g \in V$ sta in qualche V_m per cui si ha $\|f - g\|_2 \geq \text{dist}(f, V_m) \geq \text{dist}(f, V)$. Passando al limite per m che tende a ∞ nella formula (*) si ha quindi

$$\|f\|_2^2 - \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2 = \text{dist}(f, V)^2 \left(= \lim_{m \rightarrow \infty} \|f - S_m f\|_2^2 \right).$$

Ricordando che $\text{dist}(f, V) = 0$ se e solo se f appartiene alla chiusura di V si ottiene:

Proposizione. *Sia $f \in L^2_\tau$. Le seguenti condizioni per una $f \in L^2_\tau$ sono equivalenti:*

(i) *Per f vale l'identità di Parseval si ha cioè*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n(f)|^2;$$

(ii) *f appartiene alla chiusura dello spazio vettoriale dei polinomi trigonometrici.*

(iii) *La serie di Fourier di f converge ad $f \in L^2_\tau$.*

La dimostrazione è stata fatta sopra. Naturalmente ci si chiede subito; va bene, ma per quali $f \in L^2_\tau$ la cosa è vera? La risposta è: **per tutte**. Cioè:

. *Ogni $f \in L^2_\tau$ è somma della sua serie di Fourier, o, equivalentemente, l'insieme dei polinomi trigonometrici è denso in L^2_τ ; e per ogni $f \in L^2_\tau$ vale l'identità di Parseval.*

Basta allo scopo far vedere che un sottoinsieme denso in L^2_τ è contenuto nella chiusura dello spazio dei polinomi trigonometrici, cioè che esiste un insieme di funzioni denso in L^2_τ che è somma in L^2_τ della sua serie di Fourier; noi lo facciamo vedere per le funzioni continue C^1 a tratti, per le quali la serie di Fourier converge addirittura in L^∞_τ ; il teorema di convergenza puntuale dice che la convergenza è proprio ad f (vedi Analisi Due, 13.15).

ESERCIZIO 6. Nell'esercizio 4 si è visto che

$$(x - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{2}{n^2} e^{in x} \quad x \in [0, 2\pi].$$

Usando l'identità di Parseval calcolare $\zeta(4) := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^4$.

Risoluzione. Si ha

$$\|(\cdot - \pi)^2\|_2 = \int_0^{2\pi} (x - \pi)^4 \frac{dx}{2\pi} = \frac{\pi^4}{9} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{4}{n^4},$$

da cui

$$\frac{1}{10\pi} [(x - \pi)^5]_0^{2\pi} = \frac{\pi^4}{9} + 8\zeta(4) \quad \text{cioè} \quad \frac{\pi^4}{5} - \frac{\pi^4}{9} = 8\zeta(4),$$

ed infine

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

ESERCIZIO 7. Sviluppare in serie di Fourier, in forma complessa, ed in periodo 2π , la funzione

$$r(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta} \quad p, \varepsilon \text{ costanti reali, con } 0 < \varepsilon < 1, p > 0.$$

Risoluzione. Si pensa alla variabile complessa sul circolo, $z = e^{i\vartheta}$, con $1/z = e^{-i\vartheta}$ e quindi $\cos \vartheta = (e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta})/2 = (z + 1/z)/2$; ne segue

$$r(\vartheta) = \frac{p}{1 + \varepsilon(z + 1/z)/2} = \frac{2pz}{\varepsilon(z^2 + (2/\varepsilon)z + 1)};$$

Gli zeri del denominatore sono per $z = -1/\varepsilon \pm \sqrt{(1/\varepsilon)^2 - 1}$ e sono entrambi reali, dato che $1/\varepsilon > 1$; si ha anzi, essendo $0 < \sqrt{(1/\varepsilon)^2 - 1} < 1/\varepsilon < 1$:

$$z_1 = -\frac{1}{\varepsilon} - \sqrt{(1/\varepsilon)^2 - 1} < -1 < -\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{(1/\varepsilon)^2 - 1} = z_2 < 0.$$

Si ha quindi

$$r(\vartheta) = \frac{2pz}{\varepsilon(z - z_1)(z - z_2)}.$$

La funzione razionale a secondo membro può essere sviluppata in serie di Laurent sulla corona circolare $|z_2| < |z| < |z_1|$; i coefficienti dello sviluppo di Laurent sono i coefficienti di Fourier di f . Scriviamo la funzione razionale in fratti semplici:

$$\begin{aligned} \frac{2(p/\varepsilon)z}{(z - z_1)(z - z_2)} &= \frac{2p}{\varepsilon} \left(\frac{z_1/(z_1 - z_2)}{z - z_1} + \frac{z_2/(z_2 - z_1)}{z - z_2} \right) = \\ &= \frac{2p}{2\varepsilon\sqrt{(1/\varepsilon)^2 - 1}} \left(\frac{z_2}{z - z_2} - \frac{z_1}{z - z_1} \right) = \\ &= \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left(\frac{z_2}{z - z_2} - \frac{z_1}{z - z_1} \right). \end{aligned}$$

In valore assoluto si ha $|z_2| < |z| < |z_1|$ per cui si scrive

$$\frac{z_2}{z - z_2} - \frac{z_1}{z - z_1} = \frac{z_2}{z} \frac{1}{1 - (z_2/z)} + \frac{1}{1 - (z/z_1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{z_1^n}.$$

Riscrivendo $e^{i\vartheta}$ in luogo di z si ottiene

$$r(\vartheta) = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z_1^{-n} e^{in\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} z_2^n e^{-in\vartheta} \right),$$

la convergenza della serie a secondo membro essendo totale. Si ha quindi

$$c_{-n} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} z_2^n = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left(\frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2} - 1}{\varepsilon} \right)^n = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \frac{(-1)^n \varepsilon^n}{l^n}$$

avendo posto $l = \sqrt{1 - \varepsilon^2} + 1$; e ricordando che $z_1 z_2 = 1$ si ha

$$c_n = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \frac{1}{z_1^n} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} z_2^n = c_{-n},$$

come era a priori ovvio, dato che r è funzione pari. Si trova quindi, per la serie di Fourier di r :

$$r(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} (-1)^{|n|} \frac{\varepsilon^{|n|}}{l^{|n|}} e^{in\vartheta} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\varepsilon/l)^n \cos(n\vartheta) \right)$$

□

OSSERVAZIONE. In un piano in cui sia stato introdotto un sistema di affisse complesse, la curva di equazione parametrica complessa

$$f(\vartheta) = r(\vartheta) e^{i\vartheta} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \vartheta} e^{i\vartheta}$$

rappresenta un'ellisse di parametro $p = b^2/a$ ed eccentricità $\varepsilon = c/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$, se $0 < b \leq a$ sono i semiassi dell'ellisse; l'origine è in un fuoco, e l'asse reale è orientato dall'origine al vertice più vicino. La serie di Fourier di f si trova subito da quella di r moltiplicando per $e^{i\vartheta}$ lo sviluppo di r , e si possono semplificare i coefficienti in modo significativo. Si noti che nello sviluppo di Fourier

$$f(\vartheta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\vartheta}$$

ogni monomio trigonometrico non nullo:

$$c_n e^{in\vartheta} = |c_n| e^{i\alpha_n} e^{in\vartheta} = |c_n| e^{i(n\vartheta + \alpha_n)} \quad (\alpha_n = \arg c_n)$$

è interpretabile come un circolo centrato in 0 di raggio $|c_n|$ (α_n è una *fase*, che dice che il circolo va percorso a partire da α_n). Il precedente sviluppo di Fourier è quindi lo sviluppo di un'ellisse in serie di circoli, come i cicli ed epicicli del sistema tolemaico! (vedi le dispense di Fisica Matematica di F.Cardin).

2.2.4. *La cantina di Fourier.* L'esempio che segue è tratto dal libro di Elena Prestini "Applied Harmonic Analysis", Birkhäuser 2004, pag.53 e seguenti. Una cantina deve restare fresca durante l'estate e non diventare troppo fredda d'inverno, idealmente dovrebbe mantenere la stessa temperatura tutto l'anno. Nel seguito ricaviamo un andamento della temperatura nel sottosuolo al variare della temperatura esterna. Si considera una zona piatta, con un asse x verticale verso il basso, di modo che x indica la profondità nel terreno del punto. La funzione $u : [0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indica la temperatura all'istante t nel punto alla profondità x . Si ha allora l'equazione del calore $\partial_t u(x, t) = \kappa \partial_x^2 u(x, t)$, dove $\kappa > 0$, costante, è il rapporto fra conduttività e calore specifico del terreno; è un'equazione alle derivate parziali con condizione iniziale $u(0, t) = f_0(t)$; la funzione $f_0(t)$ è la temperatura dell'ambiente, alla superficie, dipendente dalle stagioni. Si suppone che u sia limitata in tutto $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ (ipotesi alquanto ragionevole). L'equazione del calore viene risolta nel modo seguente: si suppone che per ogni $x \geq 0$ fissato la funzione $u(x, t)$ sia sviluppata in serie di Fourier nella variabile t ,

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(x) e^{in\omega t} \quad \omega = 2\pi/T, T = \text{periodo} = 1 \text{ anno};$$

si ha allora $\partial_t u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in\omega) u_n(x) e^{in\omega t}$, mentre (supponendo di poter derivare per serie) si ha $\partial_x^2 u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n''(x) e^{in\omega t}$, e quindi l'equazione $\partial_t u(x, t) = \kappa \partial_x^2 u(x, t)$ si traduce nelle infinite equazioni

$$(in\omega) u_n(x) = \kappa u_n''(x) \iff u_n''(x) - (in\omega/\kappa) u_n(x) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Sono equazioni ordinarie del secondo ordine, lineari a coefficienti costanti; l'equazione caratteristica è $\zeta^2 = in\omega/\kappa = (\text{sgn } n) i|n|\omega/\kappa$, con soluzioni $\zeta = \pm \alpha_n$, dove $\alpha_n = (1 + \text{sgn } ni) \sqrt{|n|\omega/(2\kappa)}$ per $n \neq 0$. L'integrale generale è quindi

$$u_n(x) = C_n e^{\alpha_n x} + D_n e^{-\alpha_n x} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};$$

poichè $\text{Re}(\alpha_n) > 0$, se $C_n \neq 0$ si ha che $u_n(x)$ diverge al tendere di n a $\pm\infty$, contraddicendo la limitatezza di $u(x, t)$: se infatti $|u(x, t)| \leq M$ per $(x, t) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}$ si ha

$$|u_n(x)| = \left| \int_0^T u(x, t) e^{-in\omega t} \frac{dt}{T} \right| \leq \int_0^T |u(x, t)| \frac{dt}{T} \leq M \quad \text{per ogni } x \geq 0 \text{ ed ogni } n \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente, essendo $u_0(x) = C_0 x + D_0$ si deve avere $C_0 = 0$. Si trova quindi

$$u_n(x) = D_n e^{-\sqrt{|n|\omega/(2\kappa)} x} e^{-\text{sgn } ni \sqrt{|n|\omega/(2\kappa)} x} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Deve poi essere $u_n(0) = c_n$, se $u(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$, e quindi $c_n = D_n$. Si trova infine

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-\sqrt{|n|\omega/(2\kappa)} x} e^{-\text{sgn } ni \sqrt{|n|\omega/(2\kappa)} x} e^{in\omega t}.$$

Facciamo un'ipotesi sull'andamento delle temperature superficiali, che sia $f(t) = c - A \cos(\omega t)$, dove $t = 0$ è il primo di gennaio, $c = 15$ centigradi ed $A = 20$ centigradi; l'ipotesi corrisponde ad una temperatura minima di -5 centigradi il primo gennaio e massima di 35 centigradi 6 mesi dopo, e oscillazione sinusoidale

della temperatura attorno al valore medio c ; si ha allora $c_0 = c$, $c_{\pm 1} = -A/2$, e $c_n = 0$ per $n \neq 0, \pm 1$, e quindi

$$u(x, t) = c - \frac{A}{2} e^{-\sqrt{\omega/(2\kappa)}x} (e^{i(-\sqrt{\omega/(2\kappa)}x + \omega t)} + e^{-i(-\sqrt{\omega/(2\kappa)}x + \omega t)}) = \\ c - A e^{-\sqrt{\omega/(2\kappa)}x} \cos(\omega t - \sqrt{\omega/(2\kappa)}x).$$

Alla distanza x dalla superficie la temperatura oscilla quindi ancora attorno al valore medio c , ma con ampiezza smorzata del fattore $e^{-\sqrt{\omega/(2\kappa)}x}$ e fase ritardata di $\sqrt{\omega/(2\kappa)}x$. Per il terreno ordinario si ha $\kappa = 2 \cdot 10^{-7}$ metri²/sec, mentre $T = 365 \cdot 24 \cdot 3600$ secondi, e quindi

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600 \cdot 4 \cdot 10^{-7}}} \text{metri}^{-1} \approx 0.706 \text{metri}^{-1}.$$

Per una profondità x tale che $\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}x \approx \pi$ le temperature sono sfasate rispetto alla superficie di esattamente mezzo anno; si ha $x = \pi/0.706 \text{metri} \approx 4.4 \text{metri}$; a circa quattro metri e mezzo di profondità la temperatura è sfasata di sei mesi rispetto all'esterno, cioè raggiunge il minimo d'estate ed il massimo d'inverno; inoltre è smorzata di un fattore pari circa a $e^{-\pi} \approx 0.04$. In giugno la temperatura a questa profondità è circa $15 - 20 \cdot 0.04 = 14$ centigradi. Ad una profondità doppia lo smorzamento è di un fattore pari a circa $e^{-2\pi} \approx 0.002 = 2 \cdot 10^{-3}$, e le oscillazioni attorno alla media non superano il centesimo di grado!

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_\alpha(x) = \cosh(\alpha x)$ per $-1/2 \leq x < 1/2$, prolungata poi in periodo 1 a tutto \mathbb{R} ; $\alpha > 0$ è un parametro reale.

- (i) Tracciare un grafico di f_α (la porzione al di sopra dell'intervallo $[-1, 3/2]$, supponendo $\alpha = 2$, solo per questo scopo) e senza calcolare la serie di Fourier di f_α dire a quale funzione essa converge puntualmente, e quale fra i seguenti tipi di convergenza essa presenta:

in L_1^1 ; in L_1^2 ; in L_1^∞ ; totale.

- (ii) Trovare i coefficienti di Fourier di f_α , sia in forma reale che in forma complessa, e controllare le affermazioni sopra fatte.
(iii) Usando i risultati precedenti calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2 + \alpha^2}; \quad \text{dedurne, per } \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \beta^2}.$$

Risoluzione. (i) Il grafico è come in figura.

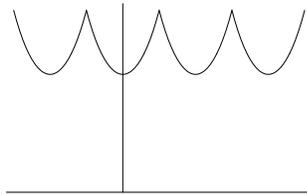


FIGURA 10. Grafico di f_α , con $\alpha = 2$.

La funzione è chiaramente continua e di classe C^1 a tratti; quindi ha una serie di Fourier totalmente convergente ad f . La convergenza totale implica quella uniforme e quindi anche quella puntuale e quella in L^∞ , e questa implica quelle in L_1^1 ed in L_1^2 .

- (ii) Si ha (supponiamo $\alpha \neq 0$)

$$c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} \cosh(\alpha x) e^{-2\pi i n x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} (e^{(\alpha - 2\pi i n)x} + e^{-(\alpha + 2\pi i n)x}) dx =$$

(si noti che $\alpha \pm 2\pi i n$ non è mai nullo, essendo α reale non nullo)

$$\frac{1}{2} \left[\frac{e^{(\alpha - 2\pi i n)x}}{\alpha - 2\pi i n} - \frac{e^{-(\alpha + 2\pi i n)x}}{\alpha + 2\pi i n} \right]_{x=-1/2}^{x=1/2} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{e^{\alpha/2}(-1)^n - e^{-\alpha/2}(-1)^n}{\alpha - 2\pi in} - \frac{e^{-\alpha/2}(-1)^n - e^{\alpha/2}(-1)^n}{\alpha + 2\pi in} \right) =$$

$$(-1)^n \sinh(\alpha/2) \left(\frac{1}{\alpha - 2in\pi} + \frac{1}{\alpha + 2in\pi} \right) = (-1)^n \frac{2\alpha \sinh(\alpha/2)}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2}.$$

La serie reale si ha mettendo assieme i termini in n ed in $-n$; è di soli coseni perché f_α è pari: si ha $a_0(f)/2 = c_0 = 2 \sinh(\alpha/2)/\alpha$, e

$$a_n(f) = (-1)^n \frac{4\alpha \sinh(\alpha/2)}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2},$$

per cui la serie di Fourier reale di f è

$$f(x) = \frac{2 \sinh(\alpha/2)}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4\alpha \sinh(\alpha/2)}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} \cos(2\pi nx).$$

La serie delle sup-norme è, a parte il primo termine, $4\alpha \sinh(\alpha/2) \sum_{n=1}^{\infty} 1/(\alpha^2 + 4n^2\pi^2)$, chiaramente convergente. Quindi si ha effettivamente convergenza totale.

(iii) Calcolando l'ultima serie per $x = 1/2$, essendo $\cos(2\pi n(1/2)) = \cos(\pi n) = (-1)^n$, si ottiene

$$\cosh(\alpha/2) = \frac{2 \sinh(\alpha/2)}{\alpha} + 4\alpha \sinh(\alpha/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2}, \text{ da cui}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{4\alpha} \operatorname{coth}(\alpha/2) - \frac{1}{2\alpha^2},$$

e pertanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + 4n^2\pi^2} = \frac{1}{4\alpha} \operatorname{coth}(\alpha/2) - \frac{1}{2\alpha^2},$$

da cui, posto $\beta = (\alpha/(2\pi))$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} \operatorname{coth}(\pi\beta) - \frac{1}{2\beta^2}.$$

□

ESERCIZIO 9. Sia $f(x) = \cos(\pi x)$ per $x \in [-1/2, 1/2]$, prolungata ad \mathbb{R} per periodicità in periodo 1: fare il grafico di f , trovare i coefficienti di Fourier di f in forma reale, e verificare che la serie di Fourier di f è totalmente convergente.

Risoluzione. (i) Si ha

$$a_0/2 = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi x) dx = \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \frac{2}{\pi},$$

e per $n \geq 1$:

$$a_n = 2 \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi x) \cos(2n\pi x) dx = 4 \int_0^{1/2} \frac{\cos((2n+1)\pi x) + \cos((2n-1)\pi x)}{2} dx =$$

$$2 \left[\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi} + \frac{\sin((2n-1)\pi x)}{(2n-1)\pi} \right]_{x=0}^{x=1/2} =$$

$$2 \frac{\sin(n\pi + \pi/2)}{(2n+1)\pi} + 2 \frac{\sin(n\pi - \pi/2)}{(2n-1)\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2 - 1)}.$$

La serie è

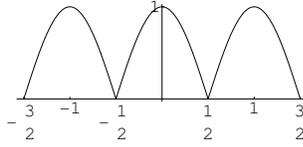
$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos(2\pi nx).$$

La serie delle sup-norme è

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1},$$

chiaramente convergente.

□

FIGURA 11. Grafico di f .

ESERCIZIO 10. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π , che per $x \in [0, 2\pi[$ vale $f(x) = (\pi - x)^4$.

- (i) Tracciare il grafico di f . È vero che f è continua? Si sa che una delle seguenti serie converge ad f in $L^2([0, 2\pi])$:

$$\frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^3 n^3 - 6}{n^4} \cos(nx); \quad \frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2 n^2 - 6}{n^4} \cos(nx).$$

Senza calcolare integrali, sapreste dire per quale delle due ciò è vero? E la serie converge ad f anche in $L^\infty(\mathbb{R})$? ed in $L^1([0, 2\pi])$?

- (ii) Ricordiamo che per $s > 1$ la funzione ζ di Riemann è definita ponendo $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$; sapendo che si ha

$$\zeta(2) = \pi^2/6; \quad \zeta(4) = \pi^4/90; \quad \zeta(6) = \pi^6/945$$

si calcoli $\zeta(8)$.

2.2.5. *Caratteri.* Vogliamo dimostrare il seguente risultato:

Teorema. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}$ omomorfismo continuo del gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ dei reali nel gruppo moltiplicativo (\mathbb{U}, \cdot) dei numeri complessi di modulo 1. Esiste allora un unico $\omega \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si abbia $\varphi(x) = e^{i\omega x}$.

Dimostrazione. Si pone, per $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$. La funzione $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ così definita è chiaramente di classe C^1 , essendo anzi $F'(x) = \varphi(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Sia $h \in \mathbb{R}$ tale che $F(h) \neq 0$ (ovviamente esistente, dato che altrimenti F sarebbe identicamente nulla, e quindi $F'(x) = \varphi(x)$ sarebbe pure identicamente nulla, assurdo). Si ha

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} \varphi(t) dt, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

In quest'integrale facciamo il cambiamento di variabile $t = x + u$; si trova

$$\int_x^{x+h} \varphi(t) dt = \int_0^h \varphi(x+u) du = \int_0^h \varphi(x)\varphi(u) du = \varphi(x) \int_0^h \varphi(u) du = \varphi(x) F(h).$$

Si ha quindi

$$F(x+h) - F(x) = \varphi(x) F(h) \quad \text{da cui, essendo } F(h) \neq 0 \text{ si ottiene:}$$

$$\varphi(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{F(h)} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Quest'identità mostra che $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; e derivandola si ha

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{F(h)} \quad \text{quindi} \quad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)\varphi(h) - \varphi(x)}{F(h)} = \frac{\varphi(h) - 1}{F(h)} \varphi(x).$$

Posto $k = (\varphi(h) - 1)/F(h)$ si ha che φ risolve l'equazione differenziale $\varphi'(x) = k \varphi(x)$, dove k è costante. Quindi si ha $\varphi(x) = \varphi(0) e^{kx}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Essendo φ omomorfismo si ha $\varphi(0) = 1$; e dovendo essere $|\varphi(x)| = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, k deve essere puramente immaginario, $k = i\omega$, con $\omega \in \mathbb{R}$. L'unicità di ω è ovvia: se si ha $e^{i\alpha x} = e^{i\beta x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha = \beta$: infatti $e^{i(\alpha-\beta)x} = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ implica $\alpha - \beta = 0$. \square

OSSERVAZIONE. La stessa dimostrazione mostra anche che basta supporre φ misurabile; la funzione $F(x)$ può infatti ancora essere definita, dato che $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ è localmente integrabile; F è localmente assolutamente continua, ed ancora si ha $\varphi(x) = (F(x+h) - F(x))/F(h)$ per un conveniente h tale che $F(h) \neq 0$; quindi φ è continua, e si ripete quanto sopra.

2.2.6. *La formula di Gutzmer.* Sia $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, sia $c \in D$ e sia $R > 0$ tale che $B(c, R) \subseteq D$ allora in $B(c, R[$ si ha, come ben noto, che f è somma della sua serie di Taylor centrata in c , cioè $f(z) = c_0 + c_1(z - c) + c_2(z - c)^2 + \dots$. Posto $f_r(\vartheta) = f(c + r e^{i\vartheta})$, funzione periodica di periodo 2π , sostituendo $r e^{i\vartheta}$ al posto di z nello sviluppo in serie di f si trova

$$f(c + r e^{i\vartheta}) = f_r(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f_r) e^{in\vartheta},$$

e ricordando la convergenza totale della serie di Taylor di f ad f stessa sui dischi $B(c, r]$ con $0 < r < R$, questa serie converge totalmente ad f_r su \mathbb{R} , e quindi è la serie di Fourier di f_r . Ne segue che i coefficienti di Fourier di f_r sono:

$$c_n(f_r) = c_n r^n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

e l'identità di Parseval porge la

FORMULA DI GUTZMER
$$\|f_r\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(c + r e^{i\vartheta})|^2 \frac{d\vartheta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \quad 0 < r < R.$$

Da questa formula si ha un'elegante dimostrazione del teorema del massimo modulo: supponiamo che c sia di massimo locale per $|f|$, di modo che esiste $\delta > 0$ tale che se $|z - c| \leq \delta$ allora si ha $|f(z)| \leq |f(c)| = |c_0|$. Ne segue che se $0 < r \leq \delta$ si ha $|f(r e^{i\vartheta})| \leq |c_0|$, per cui anche

$$\|f_r\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\vartheta})|^2 \frac{d\vartheta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} |c_0|^2 \frac{d\vartheta}{2\pi} = |c_0|^2;$$

dalla formula di Gutzmer segue allora

$$|c_0|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq 0 \quad 0 < r \leq \delta,$$

che chiaramente implica $c_n = 0$ per $n \geq 1$, cioè che f è costante su $B(c, R[$.

AGGIUNTE SULLE SERIE DI FOURIER

2.3. **Sviluppi di soli seni e di soli coseni.** Sia $l > 0$ fissato, e sia $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{C}$ funzione in $L^2([0, l])$. È spesso utile avere uno sviluppo di tale funzione in $[0, l]$ che sia di soli seni, o di soli coseni. C'è un unico modo per farlo, se si pretende che tali seni o coseni abbiano tutti periodo non maggiore di $2l$ (a meno che la funzione non sia già restrizione a $[0, l]$ di una funzione di periodo sottomultiplo intero di l): se si vuole una serie di soli coseni si estende prima la funzione per parità all'intervallo $[-l, l]$, poi la si prolunga in periodicità $2l$ all'intero asse reale; se si vuole una serie di soli seni si estende invece prima per disparità a $[-l, l]$, poi come sopra per periodicità; i valori in $-l, l$ possono essere diversi, come il prolungamento per disparità in 0 deve essere 0 , indipendentemente dal valore $f(0)$ di partenza; ma chiaramente ciò altera l'estensione a $[-l, l]$ solo su un insieme di misura nulla.

ESERCIZIO 11. Sviluppare $f(x) = \sin x$ in serie di soli coseni, e sviluppare poi $f(x) = \cos x$ in serie di soli seni, entrambi in $[0, \pi]$.

Risoluzione. Il prolungamento pari g di \sin è $\sin|x|$, per $x \in [-\pi, 0]$; i coefficienti sono (il periodo è 2π):

$$a_n = a_n(g) = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin|x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx;$$

si trova $a_0 = 4/\pi$, mentre, se $n \geq 1$ si ha

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)) dx;$$

per $n = 1$ si trova quindi $a_1 = (2/\pi) \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = 0$, mentre se $n \geq 2$ si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1 - \cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{1 - \cos((n-1)\pi)}{n-1} \right) = -\frac{1 + (-1)^n}{\pi} \frac{2}{n^2 - 1}.$$

Se n è dispari si trova quindi $a_n = 0$; se $n = 2k$ è pari si ha

$$a_{2k} = \frac{-4}{\pi(4k^2 - 1)},$$

e quindi

$$\sin x = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1} \right) \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

la convergenza essendo anche totale. Se poi prolunghiamo per disparità \cos in $[-\pi, 0[$, i coefficienti diventano:

$$b_n = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi \cos x \sin(nx) dx$$

se $n = 1$ si trova $b_1 = 0$, mentre, se $n \geq 2$:

$$\pi b_n = \int_0^\pi (\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)) dx = \left(\frac{1 + (-1)^n}{n+1} + \frac{1 + (-1)^n}{n-1} \right) = \frac{2n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1};$$

si ha quindi $b_n = 0$ se n dispari e

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin(2kx) \quad (0 < x < \pi);$$

si noti che la convergenza non è più uniforme, e quella puntuale si ha solo all'interno. \square

ESERCIZIO 12. Sviluppare la funzione $f(x) = |\sin x|^3$ in serie di coseni, nell'intervallo $[0, \pi]$ (si può usare l'identità $\sin^3 x = (3 \sin x - \sin(3x))/4$). Prima di fare il calcolo, rispondere alle seguenti domande: la serie che si otterra' sarà totalmente convergente? La serie delle derivate sarà pure totalmente convergente? a quale funzione?

Trovare poi il minimo della funzione $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} ||\sin x|^3 - (a \cos x + b \sin x + c)|^2 dx.$$

Risoluzione. La serie voluta è la serie di Fourier reale di f , in periodo 2π ; la funzione $x \mapsto |\sin x|^3$ è di classe C^2 ; infatti la derivata, che è $f'(x) = 3|\sin x|^2 \cos x \operatorname{sgn}(\sin x) = 3 \sin^2 x \cos x \operatorname{sgn}(\sin x)$ per $x \notin \mathbb{Z}\pi$, si prolunga per continuità in ogni punto di $\mathbb{Z}\pi$; si ha anche la derivata seconda, che è

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)(6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x) = |\sin x|(6 \cos^2 x - 3 \sin^2 x),$$

ed è continua in tutto \mathbb{R} . Ciò implica che f' ha una serie di Fourier totalmente convergente, e quindi che la serie di Fourier di f , a sua volta totalmente convergente, può essere derivata termine a termine: dalle relazioni tra i coefficienti di Fourier di f ed f' discende infatti che la serie di Fourier di f' è la serie derivata della serie di Fourier di f (fatto generale).

OSSERVAZIONE. Anche se inutile ai fini delle domande poste, osserviamo che la derivata terza fuori di $\mathbb{Z}\pi$ esiste ed è

$$f'''(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \cos x (6 \cos^2 x - 21 \sin^2 x);$$

f''' ha salti nei punti $\mathbb{Z}\pi$ e quindi non esiste in tali punti; f'' è continua e C^1 a tratti, ma non C^1 .

La serie ha solo armoniche pari, ed è di soli coseni; posto $n = 2k$ si ha:

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^3 \cos(nx) \frac{dx}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{3 \sin x - \sin(3x)}{4} \cos(2kx) dx = \\ &= \frac{3}{2\pi} \int_0^\pi \sin x \cos(2kx) dx - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin(3x) \cos(2kx) dx = \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi (\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x)) dx - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi (\sin((2k+3)x) - \sin((2k-3)x)) dx = \\ &= \frac{3}{4\pi} \left[\frac{\cos((2k-1)x)}{2k-1} - \frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1} \right]_0^\pi - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\cos((2k-3)x)}{2k-3} - \frac{\cos((2k+3)x)}{2k+3} \right]_0^\pi = \\ &= \frac{-3}{2\pi} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+3} \right) = \frac{6}{2\pi} \frac{1}{(2k)^2 - 9} - \frac{6}{2\pi} \frac{1}{(2k)^2 - 1} = \\ &= \frac{6}{2\pi} \frac{8}{((2k)^2 - 1)((2k)^2 - 9)} = \frac{1}{\pi} \frac{24}{((2k)^2 - 1)((2k)^2 - 9)}. \end{aligned}$$

Quanto all'ultima domanda, il minimo richiesto è il quadrato della distanza di f dallo spazio dei polinomi trigonometrici di grado 1; esso si ha con a, b, c uguali ai coefficienti di Fourier di f (in periodo 2π) e quindi con $a = b = 0$, e $c = a_0/2 = 12/(9\pi)$; il suo quadrato vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^6 dx - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{12}{9\pi}\right)^2 dx;$$

si ha ora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^6 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(3 \sin x - \sin(3x))^2}{16} dx = \\ &= \frac{9}{16} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx + \frac{1}{16} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3x) dx - \frac{1}{6} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin(3x) dx = \frac{5}{8}\pi; \end{aligned}$$

ed il minimo voluto è quindi $5\pi/8 - 288/(81\pi)$

□

ESERCIZIO 13. Sviluppare $f(x) = x(\pi - x)$ nell'intervallo $[0, \pi]$ in serie di soli seni, spiegando accuratamente il procedimento e disegnando i grafici delle funzioni periodiche che compaiono. Prima di calcolare i coefficienti, dire quale convergenza ci si deve attendere (totale? solo in L^2 ?). Servirsene per calcolare la somma della serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(2k+1)^3$.

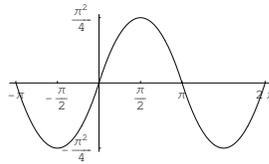


FIGURA 12. Prolungamento di f , prima per disparità e poi in periodicità 2π .

Risoluzione. La funzione prolungata prima per disparità e poi per periodicità 2π viene di classe C^1 ; quindi ci si aspetta convergenza totale. Si ha

$$\begin{aligned} b_n &= 4 \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(nx) \frac{dx}{2\pi} = 2 \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = \\ &= 2 \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x}{n} \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{2x}{n^2} \sin(nx) - \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3} \right) \cos(nx) \right]_{x=0}^{x=\pi} = \\ &= \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{n^2 \pi^2 - 2}{n^3} (-1)^{n+1} - \frac{2}{n^3} \right) = \frac{2}{\pi} \frac{n^2 \pi^2 (-1)^{n+1} - n^2 \pi^2 (-1)^{n+1} + 2(-1)^{n+1} + 2}{n^3} = \\ &= 4 \frac{1 + (-1)^{n+1}}{\pi n^3}. \end{aligned}$$

Si ha quindi $b_n = 0$ se n è pari, mentre è $b_{2k+1} = 8/(\pi(2k+1)^3)$ per $n = 2k+1$ dispari; la serie è

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3} \quad (x \in [0, \pi]).$$

Posto $x = \pi/2$ in tale formula si ha

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k\pi + \pi/2)}{(2k+1)^3} \quad \text{da cui} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

□

ESERCIZIO 14. Sviluppo in serie di coseni della funzione $f(x) = x(\pi - x)$ per $x \in [0, \pi]$; prima di calcolarlo, prevedere il tipo di convergenza. Dalla formula, mostrare che si ha $x(\pi - x)/2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin^2(kx)/k^2$.

Risoluzione. (schematica): il prolungamento pari è continuo e C^1 a tratti con $f' \in L^2_{2\pi}$, quindi la convergenza sarà totale; il periodo è π , quindi mancano le armoniche dispari. Si trova

$$\pi^2/6 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2};$$

ponendo $x = 0$ si trova il ben noto risultato $\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} (1/k^2)$; da cui

$$x(\pi - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(2kx)}{k^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(kx)}{k^2}.$$

□

ESERCIZIO 15. Provare la *disuguaglianza di Wirtinger*: se $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ è continua e C^1 a tratti, ed $u(a) = u(b) = 0$, allora si ha

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |u'(x)|^2 dx.$$

(supporre $a = 0$, come non è restrittivo; prolungare per disparità la funzione in $[-b, b]$, poi per periodicità $2b$ a tutto \mathbb{R} ; esprimere i coefficienti di u' con quelli di u , ed usare l'identità di Parseval). Per quali funzioni vale l'uguaglianza?

Risoluzione. Chiamiamo ancora u la funzione così prolungata. Posto $\omega = (2\pi)/(2b) = \pi/b$, si ricorda che si ha $c_n(u') = (in\omega)c_n(u)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (viene dalla formula, integrando per parti). Ne segue:

$$\|u'\|_2^2 = \int_{-b}^b |u'(x)|^2 \frac{dx}{2b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(in\omega)c_n(u)|^2 = \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(u)|^2,$$

mentre invece è

$$\|u\|_2^2 = \int_{-b}^b |u(x)|^2 \frac{dx}{2b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(u)|^2;$$

si noti ora che essendo u dispari si ha $c_0(u) = 0$, per cui in entrambe le serie il termine con $n = 0$ è nullo. Supposta u non identicamente nulla si ha

$$\frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \omega^2 \frac{\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} n^2 |c_n(u)|^2}{\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} |c_n(u)|^2};$$

i termini della serie a numeratore sono maggiori o uguali dei corrispondenti termini della serie a denominatore; l'uguaglianza si ha per $n = \pm 1$, e se $|n| > 1$ si ha solo per $c_n(u) = 0$. Ne segue che la serie a numeratore ha somma sempre maggiore od uguale di quella a denominatore, con uguaglianza se e solo se $c_n(u) = 0$ per $|n| > 1$; quindi

$$\frac{\int_{-b}^b |u'(x)|^2 dx}{\int_{-b}^b |u(x)|^2 dx} \geq \omega^2 = \frac{\pi^2}{b^2},$$

con uguaglianza se e solo se $c_n = 0$ per $|n| > 1$. La disuguaglianza è stata provata; si ha uguaglianza se e solo se $u(x) = c_{-1}e^{-i\omega x} + c_1e^{i\omega x}$; ricordando che u è dispari su $[-b, b]$ si ha $c_{-1} = -c_1 (= c)$; l'uguaglianza si ha solo per funzioni della forma $2ic \sin(\omega x) = k \sin(\pi x/b)$, con k costante arbitraria. □

ESERCIZIO 16. Si ha la serie trigonometrica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$ in periodo $\tau = 2\pi/\omega$. Sia poi $f \in L^1_{\tau}$, e supponiamo che la serie converga ad f in uno dei modi seguenti:

- (1) in L^1_{τ} ; (2) in L^2_{τ} ; (3) in L^{∞}_{τ} ; (4) totalmente su \mathbb{R} .

Scrivere questo mediante le corrispondenti norme, se possibile; dire quali implicazioni ci sono fra questi modi di convergenza, e quali fra essi sono sufficienti ad affermare che la serie è la serie di Fourier di f , cioè che si ha ...

Sia poi $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa in un insieme aperto D che contiene la corona circolare aperta $A = B(c,]\alpha, \beta[= \{z \in \mathbb{C} : \alpha < |z - c| < \beta\}$, dove si ha $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$; sia

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - c)^n$$

lo sviluppo di Laurent di f in A . Per ogni r con $0 < r < \beta$ sia $f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f_r(\vartheta) = f(c + r e^{i\vartheta})$; trovare la serie di Fourier di f_r , esprimendone i coefficienti mediante i c_n . È vero che si ha convergenza totale ad f_r della serie di Fourier di f_r ?

Dimostrare poi che se $\alpha < r < \beta$ si ha

$$\int_0^{2\pi} |f(c + r e^{i\vartheta})|^2 \frac{d\vartheta}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n},$$

e servirsene per provare che se $\alpha > 0$ si ha:

$$\int_0^{2\pi} e^{\alpha \cos \vartheta} \frac{d\vartheta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{(2^n n!)^2}.$$

Risoluzione. Ricordiamo che convergenza della serie trigonometrica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$ è, per definizione, riferito alla convergenza delle successioni delle somme parziali $S_m(x) = \sum_{n=-m}^m c_n e^{in\omega x}$. Quindi: convergenza in L^1_τ ad f significa $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - S_m\|_1 = 0$, convergenza in L^2_τ ad f significa $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - S_m\|_2 = 0$, convergenza in L^∞_τ ad f significa convergenza uniforme q.o. ad f , cioè $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f - S_m\|_\infty = 0$. Infine, convergenza totale ad f significa convergenza puntuale ad f , ed in più si ha l'informazione che la serie delle sup-norme, che è la serie numerica $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|$, è convergente; è ben noto che allora la convergenza ad f è anche uniforme. Le convergenze in questione sono sempre più forti, da (1) a (4); ricordiamo che ci sono le disuguaglianze

$$\|f - S_m\|_1 \leq \|f - S_m\|_2 \leq \|f - S_m\|_\infty.$$

Uno dei primi teoremi dimostrati sulle serie di Fourier è che la convergenza in L^1_τ implica che si ha

$$c_n = c_n(f) = \int_{(\tau)} f(x) e^{-in\omega x} \frac{dx}{\tau}$$

(Analisi Due, Prop. 13.5.1); tutte le precedenti convergenze implicano quindi che la serie data è la serie di Fourier della funzione a cui converge. Ricordiamo poi che la serie di Laurent di una funzione olomorfa converge totalmente alla funzione stessa su ogni compatto contenuto nella corona circolare aperta di convergenza, in particolare si ha convergenza assoluta su ogni circolo centrato in c con raggio r compreso fra α e β , cioè la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| r^n \quad \alpha < r < \beta$$

è convergente. Si ha, da $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - c)^n$ per $z \in A$, che per $\alpha < r < \beta$:

$$f_r(\vartheta) = f(c + r e^{i\vartheta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^n e^{in\vartheta},$$

con convergenza totale al variare di $\vartheta \in \mathbb{R}$ della serie a secondo membro. Quindi si ha $c_n(f_r) = c_n r^n$, e la convergenza ad f_r è totale. L'affermazione successiva non è altro che l'identità di Parseval per f_r :

$$\|f_r\|_2^2 := \int_0^{2\pi} |f(c + r e^{i\vartheta})|^2 \frac{d\vartheta}{2\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

Infine si prende $f(z) = e^z$, $c = 0$, ed $r > 0$ qualsiasi; si ha $c_n = 1/n!$ e quindi

$$\int_0^{2\pi} \left| e^{r e^{i\vartheta}} \right|^2 \frac{d\vartheta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2} \quad (r > 0);$$

ma $|\exp(r e^{i\vartheta})| = \exp(\operatorname{Re}(r e^{i\vartheta})) = e^{r \cos \vartheta}$, per cui

$$\int_0^{2\pi} e^{2r \cos \vartheta} \frac{d\vartheta}{2\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n}}{(n!)^2} \quad (r > 0),$$

e posto $\alpha = 2r$ si ottiene la formula voluta. □

OSSERVAZIONE. Che sia $c_n(f_r) = c_n r^n$ si ottiene subito anche dalla formula dei coefficienti della serie di Laurent

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(c,r]} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(c + r e^{i\vartheta})}{r^{n+1} e^{i(n+1)\vartheta}} i r e^{i\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{r^n} \int_0^{2\pi} f(c + r e^{i\vartheta}) e^{-in\vartheta} \frac{d\vartheta}{2\pi} = \frac{1}{r^n} c_n(f_r).$$