**TRASFORMAZIONE DI FOURIER CLASSICA**
(METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA)

GIUSEPPE DE MARCO

0.1. **Introduzione.** Per un fenomeno periodico, rappresentato da funzioni periodiche, lo sviluppo in serie di Fourier di queste costituisce un metodo per l'analisi del fenomeno stesso: le armoniche dello sviluppo di Fourier hanno spesso significato fisico, intendendosi con ciò il fatto che esistono strumenti di vario genere (risuonatori, oscilloscopi, ecc.) che permettono di rilevare e misurare tali armoniche. Per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ non periodiche è possibile qualcosa del genere? Si può pensare di prendere un numero $\tau$ grande, di considerare la funzione su $[-\tau/2, \tau/2[$, di estendere per periodicità tale restrizione al di fuori di $[-\tau/2, \tau/2[$, e di considerare la successione $c(f,\tau) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dei coefficienti di Fourier di tale funzione; al tendere di $\tau$ a $+\infty$, $c(f,\tau)$ dovrebbe, sotto opportune ipotesi su $f$, tendere ad un oggetto legato alla funzione $f$. Non possiamo però restare nell'ambito discreto; come funzione su $\mathbb{Z}$, la successione dei coefficienti di Fourier, almeno per $f \in L^1(\mathbb{R})$, tende solo a zero. Si fa diventare ogni $c(f,\tau)$ una funzione $\widehat{f}_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, costante a tratti, nel modo seguente: si prende un "passo" $d = 1/\tau$, e la funzione $\widehat{f}_\tau(\nu)$ è definita dalla formula

$$\widehat{f}_\tau(\nu) = \frac{1}{d} c_n(f,\tau) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{n}{\tau} t}\, dt, \qquad \frac{n}{\tau} \le \nu < \frac{n+1}{\tau},$$

o se si preferisce dalla formula

$$\widehat{f}_\tau(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-2\pi i \frac{n}{\tau} t}\, dt \right) \chi_{[n/\tau,(n+1)/\tau[}(\nu);$$

( si rappresentano insomma le successioni $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mediante funzioni a scalino su $\mathbb{R}$, in passo $d$, usando l'interpolazione detta "a tenuta"; il fattore $1/d = \tau$ serve a far sì che le sommatorie in $\mathbb{Z}$ diventino gli integrali su $\mathbb{R}$). Si può allora dimostrare (non è difficile, ma non lo facciamo; queste righe sono solo a titolo euristico) che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora, per $\tau \to +\infty$ la funzione $\widehat{f}_\tau$ tende uniformemente su $\mathbb{R}$ ad una funzione continua $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, detta *trasformata di Fourier* di $f$.

0.2. **Definizione e prime proprietà.**

**Definizione.** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funzione assolutamente integrabile su $\mathbb{R}$. La *trasformata di Fourier* di $f$ è la funzione $\Phi f = \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definita dalla formula:

$$\Phi f(\nu) = \widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt, \qquad \text{per ogni } \nu \in \mathbb{R}.$$

Prima di procedere oltre:

**Proposizione.** *La trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua e nulla all'infinito, si ha cioè $\lim_{\nu \to \pm\infty} \widehat{f}(\nu) = 0$.*

*Dimostrazione.* La continuità di $\widehat{f}$ è un'immediata conseguenza del teorema della convergenza dominata (Analisi Due, 9.22.1); la tendenza a zero all'infinito è il lemma di Riemann–Lebesgue (Analisi Due, 13.1). $\square$

Osservazione. Qui, ed anche in seguito quando faremo le trasformate di Laplace, tendiamo ad usare i teoremi della teoria dell'integrazione alla Lebesgue, sostituendo essi a varie nozioni tradizionalmente usate in passato, quali integrali uniformemente convergenti rispetto ad un parametro, e simili: più semplici forse, non dipendendo dall'integrale di Lebesgue, ma in definitiva più onerose per chi studia, richiedendo argomentazioni ad hoc ogni volta. I teoremi di convergenza che rendono utile l'integrale di Lebesgue possono essere tranquillamente accettati senza dimostrazione, come pure i teoremi di Fubini e Tonelli: si ha a disposizione una strumento in fondo semplice, ed assai potente.

L'insieme delle funzioni continue nulle all'infinito si indica con $C_0(\mathbb{R})(= C_0(\mathbb{R},\mathbb{C}))$; sono chiaramente funzioni limitate ed uniformemente continue, spazio di Banach nella sup–norma.

La trasformazione di Fourier è banalmente lineare, $(\alpha f+\beta g)\widehat{\ } = \alpha\widehat{f}+\beta\widehat{g}$ per ogni $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ ed $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$; essendo, per ogni $f\in L^1(\mathbb{R})$ $\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$, come risulta subito dalla disuguaglianza fondamentale

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt = \|f\|_1, \qquad \text{per ogni } \nu\in\mathbb{R},$$

la trasformazione di Fourier è anche continua da $L^1$ a $C_0$: se $f_k$ è successione di funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ che converge $L^1$ ad $f$, allora $\widehat{f_k}$ converge uniformemente a $\widehat{f}$. La norma operatoriale di $\Phi$ è chiaramente minore od uguale ad 1, e si ha anzi $\|\Phi\|=1$, come sarà chiaro da vari calcoli espliciti di trasformate fatti in seguito.

Data $f\in L^1(\mathbb{R})$, $f$ è l'*originale di Fourier* di $\widehat{f}$, che è la sua *trasformata di Fourier*; non è ancora chiaro che ci sia un unico originale di Fourier, cioè che la trasformazione di Fourier sia iniettiva; la cosa è vera, ma sarà vista dopo la formula di inversione. Non è invece suriettiva la trasformazione di Fourier da $L^1(\mathbb{R})$ a $C_0(\mathbb{R})$, cioè non ogni funzione continua infinitesima all'infinito è trasformata di Fourier di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$; ma non è del tutto banale dare esempi.

Per ogni funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ si definisce la *simmetrizzata* $\tilde{f}$ ponendo $\tilde{f}(t)=f(-t)$; si pone poi $f^*(t)=\overline{f(-t)}$ (coniugata della simmetrizzata); le funzioni pari sono quindi quelle per cui $\tilde{f}=f$, le dispari quelle con $\tilde{f}=-f$; si chiamano talvolta *hermitiane* le funzione con $f=f^*$, antihermitiane quelle con $f^*=-f$.

Le simmetrie sono della massima importanza nell'analisi di Fourier.

0.2.1. *Simmetrizzazione e trasformata di Fourier.* Commutano fra loro:

. *La trasformata della simmetrizzata è la simmetrizzata della trasformata.*

*Dimostrazione.*

$$\Phi\tilde{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\theta)e^{-2\pi i\nu(-\theta)}\,(-d\theta) =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-2\pi i(-\nu)\theta}\,d\theta = \Phi f(-\nu) = \widetilde{(\Phi f)}(\nu).$$

□

In particolare, funzioni pari hanno trasformate pari, funzioni dispari hanno trasformate dispari.

0.2.2. *Coniugio e simmetria.*

. *La trasformata della coniugata è la simmetrica hermitiana della trasformata, la trasformata della simmetrica hermitiana è la coniugata della trasformata.*

In simboli

$$(\bar{f})\widehat{\ } = (\widehat{f})^*; \qquad (f^*)\widehat{\ } = (\widehat{f})^-.$$

La facile dimostrazione si lascia come esercizio; si basa sul fatto che il coniugato di un integrale è l'integrale del coniugato; si noti che la trasformata di una funzione reale è a simmetria hermitiana, ed ogni funzione reale pari ha trasformata reale e pari; le funzioni reali dispari hanno trasformata dispari immaginaria pura.

0.2.3. *Comportamento rispetto alle omotetie.*

. *Se $\lambda\in\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$, ed $f\in L^1(\mathbb{R})$, la trasformata di $t\mapsto f(\lambda t)$ è*

$$\nu\mapsto \frac{1}{|\lambda|}\widehat{f}(\nu/\lambda).$$

*Dimostrazione.* Si ha, posto $g(t)=f(\lambda t)$, e supposto dapprima $\lambda>0$, con il cambiamento di variabile $\lambda t=\theta$:

$$\widehat{g}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-2\pi i(\nu/\lambda)\theta}\frac{d\theta}{\lambda};$$

se $\lambda<0$ si scambiano gli estremi di integrazione, e se ne ripristina l'originale posizione cambiando il segno. □

0.2.4. *Traslazioni diventano moltiplicazioni per caratteri.*

. *Per ogni* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *ed ogni* $a \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$(\mathrm{tr}_a\, f)\widehat{\ }(\nu) = e^{-2\pi i a\nu}\widehat{f}(\nu) \qquad \text{per ogni } \nu \in \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.*

$$(\mathrm{tr}_a\, f)\widehat{\ }(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)e^{-2\pi i\nu(a+\theta)}\,d\theta = e^{-2\pi i a\nu}\widehat{f}(\nu).$$

□

0.2.5. *Moltiplicazioni per caratteri diventano traslazioni.*

. *Per ogni* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *ed ogni* $a \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\left(e^{2\pi i a \#} f(\#)\right)\widehat{\ } = \mathrm{tr}_a\, \widehat{f}.$$

*Dimostrazione.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i a t} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i(\nu-a)t}\,dt = \widehat{f}(\nu-a) = \mathrm{tr}_a\, \widehat{f}(\nu).$$

□

0.2.6. *Derivata della trasformata.*

. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *è tale che* $t \mapsto tf(t)$ *sta ancora in* $L^1(\mathbb{R})$, *allora* $\widehat{f}$ *è di classe* $C^1$, *e si ha*

$$\partial\Phi f = \Phi((-2\pi i\#)f(\#));$$

*in altre parole*

$$\partial\Phi f(\nu) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi i t)f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt.$$

*Più generalmente, se per un intero* $m \geq 1$ *si ha che* $t \mapsto t^m f(t)$ *appartiene ad* $L^1$, *allora* $\widehat{f}$ *è di classe* $C^m$ *e si ha*

$$\partial^m(\Phi f) = \Phi((-2\pi i\#)^m f(\#)).$$

La dimostrazione è conseguenza immediata del teorema di derivazione sotto il segno di integrale, Analisi Due, 9.22.2(ii). È uso ricordarla dicendo "più rapidamente $f$ tende a 0 all'infinito, e più derivate ha la trasformata", anche se non è affatto necessario che $f$ tenda a 0 per verificare le ipotesi dell'enunciato precedente.

0.2.7. *Trasformata della derivata.*

. *Se* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *è continua e* $C^1$ *tratti, con* $f' \in L^1(\mathbb{R})$, *allora si ha*

$$\Phi(\partial f)(\nu) = (2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu).$$

*Dimostrazione.* Anzitutto, nelle ipotesi poste si ha $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\theta)\,d\theta$; essendo $f' \in L^1(\mathbb{R})$, i limiti

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(\theta)\,d\theta; \qquad \lim_{t\to-\infty} f(t) = f(0) - \int_{-\infty}^0 f'(\theta)\,d\theta$$

esistono finiti; e se $f$ sta in $L^1$ tali limiti sono nulli. Nell'integrazione per parti

$$\widehat{(f')}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \left[f(t)e^{-2\pi i\nu t}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} + (2\pi i\nu)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt,$$

la parentesi quadrata è allora nulla. □

Naturalmente si vede anche, per induzione su $m$:

. *Se* $f$ *è di classe* $C^{m-1}(\mathbb{R})$, *con derivata* $(m-1)-$*esima di classe* $C^1$ *a tratti, ed* $f, \partial f = f', \dots, \partial^m f = f^{(m)}$ *stanno tutte in* $L^1(\mathbb{R})$, *allora si ha*

$$\widehat{(\partial^m f)}(\nu) = (2\pi i\nu)^m\widehat{f}(\nu).$$

*Di conseguenza si ha anche che* $\widehat{f}(\nu)$ *è* $o(1/\nu^m)$ *per* $\nu \to \pm\infty$ *(cfr. Analisi Due, 13.8).*

Insomma: più derivate ha $f$, e più rapidamente $\widehat{f}$ tende a 0 all'infinito, se tali derivate stanno tutte in $L^1(\mathbb{R})$.

0.3. **Calcolo delle più comuni trasformate di Fourier.**

0.3.1. *Funzioni caratteristiche di intervalli.* Dato $\lambda > 0$ la trasformata di $\chi_{[-\lambda/2,\lambda/2]}$ è

$$\widehat{\chi}_{[-\lambda/2,\lambda/2]}(\nu) = \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \left[\frac{e^{-2\pi i\nu t}}{-2\pi i\nu}\right]_{t=-\lambda/2}^{t=\lambda/2} = \frac{e^{\pi i\nu\lambda} - e^{-\pi i\nu\lambda}}{2\pi i\nu} = \frac{\sin(\pi\lambda\nu)}{\pi\nu}.$$

Introducendo la funzione $\operatorname{sinc} s := \sin(\pi s)/(\pi s)$ (e $\operatorname{sinc} 0 = 1$), si può scrivere

$$\widehat{\chi}_{[-\lambda/2,\lambda/2]}(\nu) = \lambda \operatorname{sinc}(\lambda\nu).$$

Per un arbitrario intervallo limitato $[a, b]$, posto $c = (a+b)/2$, $\lambda = b-a$, si ha $\chi_{[a,b]}(t) = \operatorname{tr}_c \chi_{[-\lambda/2,\lambda/2]}(t)$ e quindi

$$\widehat{\chi}_{[a,b]}(\nu) = e^{-2\pi ic\nu}\lambda \operatorname{sinc}(\lambda\nu) = e^{-\pi i(a+b)\nu}(b-a)\operatorname{sinc}((b-a)\nu).$$

Si noti che $\operatorname{sinc} \notin L^1(\mathbb{R})$; si ha quindi un esempio in cui la trasformata non è più in $L^1$; però è vero che $\operatorname{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$. Inoltre le funzioni trasformande sono a supporto compatto, e quindi le trasformate devono essere $C^\infty$; infatti sinc è restrizione ad $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa intera. Si noti che le funzioni a scalino di $L^1(\mathbb{R})$, cioè quelle a supporto compatto, hanno tutte trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.

0.3.2. *Funzioni triangolari.* È spesso utile la trasformata del "triangolo" $g : t \mapsto (1 - |t|) \vee 0$; si ha

$$\widehat{g}(\nu) = \int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \left[(1-|t|)\frac{e^{-2\pi i\nu t}}{-2\pi i\nu}\right]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} t\frac{e^{-2\pi i\nu t}}{2\pi i\nu}\, dt =$$
$$\frac{1}{2\pi i\nu}\left(\int_{-1}^{0} e^{-2\pi i\nu t}\, dt - \int_{0}^{1} e^{-2\pi i\nu t}\, dt\right) = \frac{1}{(2\pi\nu)^2}\left(1 - e^{2\pi i\nu} - e^{-2\pi i\nu} + 1\right) =$$
$$\frac{2}{(2\pi\nu)^2}(1-\cos(2\pi\nu)) = \operatorname{sinc}^2 \nu.$$

Se $\lambda > 0$ la trasformata di $g_\lambda : t \mapsto g(t/\lambda) = (1 - |t/\lambda|) \vee 0$ è quindi

$$\widehat{g}_\lambda(\nu) = \lambda \operatorname{sinc}^2(\lambda\nu).$$

0.3.3. *Funzioni lorentziane.* Qualcuno chiama così le funzioni quali $f_a(t) = 1/(a^2 + t^2)$, $a$ costante reale non nulla. La trasformata di Fourier si calcola col metodo dei residui e viene

$$\widehat{f}_a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i\nu t}}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{|a|}e^{-2\pi|a\nu|}.$$

(Analisi Due, 10.27.8).

0.3.4. *Gaussiane.* Se $a > 0$, la funzione $f_a(t) = e^{-at^2}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$; l'integrale

$$\widehat{f}_a(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\cos(2\pi\nu t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\cos(2\pi\nu\theta/\sqrt{a})\frac{d\theta}{\sqrt{a}},$$

chiamato integrale di Laplace, è stato calcolato in Analisi Due, 10.6.9, con metodi di variabile complessa; si trova

$$\widehat{f}_a(\nu) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\nu^2/a}.$$

Si noti che $f_\pi(t) = e^{-\pi t^2}$ coincide con la sua trasformata di Fourier.

0.3.5. *Trasformata di* $\operatorname{sinc}^2$. La funzione $\operatorname{sinc}^2$ sta in $L^1(\mathbb{R})$ e si ha, usando le formule di Eulero e la parità:

$$\widehat{\operatorname{sinc}^2}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2}e^{-2\pi i\nu t}\, dt = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2}\cos(2\pi\nu t)\, dt =$$
$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{1-\cos(2\pi t)}{t^2}\cos(2\pi\nu t)\, dt = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi t)\cos(2\pi\nu t)}{t^2}\, dt$$

Le formule di Werner danno $\cos(2\pi t)\cos(2\pi\nu t) = (\cos(2\pi(\nu+1)t) + \cos(2\pi(\nu-1)t))/2$, per cui

$$\widehat{\operatorname{sinc}^2}(\nu) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{2\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi(\nu+1)t) - \cos(2\pi(\nu-1)t)}{t^2}\, dt =$$
$$\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi(\nu+1)t)}{t^2}\, dt + \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{\cos(2\pi\nu t) - \cos(2\pi(\nu-1)t)}{t^2}\, dt.$$

Per parti, riconduciamo all'integrale di Dirichlet ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}\, dx = \left[\frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{b\sin(bx) - a\sin(ax)}{x}\, dx =$$

$$0 + (b\,\mathrm{sgn}\, b - a\,\mathrm{sgn}\, a)\frac{\pi}{2} = (|b| - |a|)\frac{\pi}{2}.$$

Si ottiene alfine

$$\widehat{\mathrm{sinc}^2}(\nu) = \frac{1}{4\pi}(2\pi|\nu| - 2\pi|\nu+1|) + \frac{1}{4\pi}(2\pi|\nu| - 2\pi|\nu-1|) = \frac{1}{2}(|\nu| - |\nu+1| + |\nu| - |\nu-1|).$$

Per $\nu > 1$ si trova 0; per $0 \le \nu \le 1$ si trova $1-\nu$; per parità la trasformata è il triangolo $(1-|\nu|) \vee 0$; $\mathrm{sinc}^2$ era la trasformata di questa funzione; applicando due volte la trasformata di Fourier al triangolo si torna quindi alla funzione di partenza. Per le funzioni pari è un fatto universale (per quelle almeno a cui la trasformazione di Fourier è applicabile due volte!).

Esercizio 1. Sia $a \in \mathbb{C}$ con parte reale $\mathrm{Re}\, a > 0$. Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(t) = 0$ per $t < 0$, $f(t) = e^{-at}$ per $t \ge 0$. Servirsene per trovare le trasformate di Fourier di $F(t) = e^{-a|t|}$ e di $G(t) = \mathrm{sgn}\, t\, e^{-a|t|}$.

*Risoluzione.* Si ha

$$\widehat{f}(\nu) = \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+2\pi i\nu)t}\, dt = \left[\frac{e^{-(a+2\pi i\nu)t}}{-(a+2\pi i\nu)}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{a+2\pi i\nu}$$

(si noti che si ha $\lim_{t\to+\infty} e^{-(a+2\pi i\nu)t} = 0$, dato che $|e^{-(a+2\pi i\nu)t}| = e^{-t\,\mathrm{Re}\, a}$). Indicando con $\tilde{f}$ la simmetrizzata di $f$ si ha $F = f + \tilde{f}$, $G = f - \tilde{f}$, per cui

$$\widehat{F}(\nu) = \frac{1}{a+2\pi i\nu} + \frac{1}{a-2\pi i\nu} = \frac{2a}{a^2 + (2\pi\nu)^2}; \quad \widehat{G}(\nu) = \frac{1}{a+2\pi i\nu} - \frac{1}{a-2\pi i\nu} = \frac{-4\pi i\nu}{a^2+(2\pi\nu)^2}.$$

□

Esercizio 2. Calcolare la trasformata di Fourier $F(\nu)$ della funzione $f(t) = te^{-at^2}$, $a > 0$, riconducendola alla trasformata $G(\nu)$ di $g(t) = e^{-at^2}$.

*Risoluzione.* In base alla formula della derivata della trasformata si ha

$$G'(\nu) = \Phi\left((-2\pi it)g(t)\right) = (-2\pi i)\Phi\left(te^{-at^2}\right),$$

per cui la trasformata richiesta è

$$F(\nu) = \frac{1}{-2\pi i}G'(\nu) = \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\frac{2\pi^2\nu}{a}e^{-\pi^2\nu^2/a} = -i(\pi/a)^{3/2}e^{-\pi^2\nu^2/a}.$$

Si può anche ricorrere alla formula della trasformata della derivata: $te^{-at^2} = (-1/(2a))(-2ate^{-at^2}) = (-1/(2a))D(e^{-at^2})$, per cui

$$F(\nu) = \frac{-1}{2a}(2\pi i\nu)G(\nu) = -i\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\nu^2/a} = -i(\pi/a)^{3/2}e^{-\pi^2\nu^2/a}.$$

□

Esercizio 3. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\Phi(\cos(a\#)f(\#))(\nu) = \frac{\mathrm{tr}_{(a/(2\pi))}\,\widehat{f}(\nu) + \mathrm{tr}_{(-a/(2\pi))}\,\widehat{f}(\nu)}{2};$$

$$\Phi(\sin(a\#)f(\#))(\nu) = \frac{\mathrm{tr}_{(a/(2\pi))}\,\widehat{f}(\nu) - \mathrm{tr}_{(-a/(2\pi))}\,\widehat{f}(\nu)}{2i}.$$

Servirsene per calcolare la trasformata di $f(t) = \sin t\chi_{[-\pi,\pi]}$, ricordando che la trasformata di $\chi_{[-\pi,\pi]}$ è $2\pi\,\mathrm{sinc}(2\pi\nu)$.

Esercizio 4. Calcolare la trasformata di Fourier di $f(t) = 1/\cosh t$ (passare al campo complesso ed integrare su bordi di rettangoli di vertici $r, r+i\pi, -r+i\pi, -r$, indentati se occorre). Esistono $\lambda, k \in \mathbb{R}$ tali che sia $\Phi(1/\cosh(\lambda\#))(\nu) = k/\cosh(\lambda\nu)$ (cioè , tali che $1/\cosh(\lambda t)$ sia autovettore della trasformazione di Fourier, con $k$ come autovalore)?

*Risoluzione.* Si deve calcolare $\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-2\pi i\nu t}/\cosh t\right)\,dt$. Posto $\alpha=-2\pi\nu$ per semplicità, consideriamo la funzione complessa $g(z)=e^{i\alpha z}/\cosh z$; essa ha poli dove $\cosh z=0$, e cioè per $z_k=i(\pi/2+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$. Ci interessa solo $i\pi/2$, dove $D\cosh z=\sinh z$ vale $i$, e che è quindi polo del primo ordine; per il teorema dei residui si ha

$$\int_{-r}^{r}\frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\,dx-\int_{-r}^{r}\frac{e^{i\alpha(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}\,dx+\varepsilon(r)=2\pi i\,\mathrm{Res}(g,i\pi/2)=2\pi e^{-\alpha\pi/2};$$

il contributo dei lati verticali è stato indicato con $\varepsilon(r)$; ammesso che esso tenda a 0 per $r\to+\infty$ si ha, osservando anche che $\cosh(x+i\pi)=-\cosh x$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\,dx+e^{-\alpha\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\,dx=2\pi e^{-\alpha\pi/2},$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha x}}{\cosh x}\,dx=2\pi\frac{e^{-\alpha\pi/2}}{1+e^{-\alpha\pi}}=\frac{\pi}{\cosh(\alpha\pi/2)}.$$

Quindi la richiesta trasformata è $\Phi(1/\cosh(t))(\nu)=\pi/\cosh(\pi^2\nu)$. È immediato provare che il contributo dei lati verticali è infinitesimo per $r\to+\infty$; si ha infatti, detti $s_{\pm r}$ i segmenti:

$$\left|\int_{\sigma_{\pm r}}\frac{e^{i\alpha z}}{\cosh z}\,dz\right|\le\int_{\sigma_{\pm r}}\frac{|e^{i\alpha z}|}{|\cosh z|}|dz|;$$

su $s_{\pm r}$ si ha $|e^{i\alpha z}|=e^{\mathrm{Re}(i\alpha z)}=e^{-\alpha\,\mathrm{Im}\,z}\le e^{|\alpha|\pi}$, ed anche

$$|\cosh z|=\frac{|e^z+e^{-z}|}{2}\ge\frac{||e^z|-|e^{-z}||}{2}=\frac{e^r-e^{-r}}{2}=\sinh r,$$

per cui l'integrale sul segmento è dominato da $\pi e^{|\alpha|\pi}/\sinh r$ ($\pi$ è la lunghezza del segmento), infinitesimo per $r\to+\infty$. La trasformata di $1/\cosh(\lambda t)$ è allora $(\pi/|\lambda|)/\cosh(\pi^2\nu/\lambda)$; deve essere $\pi^2/\lambda=\lambda$, e cioè $\lambda^2=\pi^2$; quindi $\lambda=\pm\pi$, e $k=1$. Si noti che si è visto che $1/\cosh(\pi t)$ coincide con la sua trasformata di Fourier. $\square$

0.4. **Convoluzione.** Date due funzioni misurabili $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ la loro *convoluzione* è la funzione $f*g$ così definita

$$f*g(t)=\int_{\mathbb{R}}f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta.$$

Senza qualche condizione su $f$ e $g$ naturalmente l'integrale precedente non ha senso. Se $f,g\in L^1(\mathbb{R})$ si dimostra, usando il teorema di Fubini, che $f*g$ esiste q.o. in $\mathbb{R}$, ed appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$, essendo anzi $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$: infatti (accettato il fatto che $(t,\theta)\to f(t-\theta)g(\theta)$ sia misurabile), la funzione $(t,\theta)\to|f(t-\theta)||g(\theta)|$ sta in $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, avendosi

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(t-\theta)|\,dt\right)|g(\theta)|\,d\theta=\int_{\mathbb{R}}\|f\|_1|g(\theta)|\,d\theta=\|f\|_1\|g\|_1$$

(si osservi che è $\int_{\mathbb{R}}|f(t-\theta)|\,dt=\int_{\mathbb{R}}|f(s)|\,ds=\|f\|_1$, invarianza per traslazioni dell'integrale). La convoluzione tra funzioni fa diventare $L^1(\mathbb{R})$ un'algebra (di Banach) associativa e commutativa; è facile verificare, e lo accettiamo senz'altro, che si ha

$$(f*g)*h=f*(g*h);\ (f+g)*h=f*h+g*h;\ f*g=g*f,\qquad\text{per } f,g,h\in L^1(\mathbb{R}).$$

Esempio 5. Si ha, per $f\in L^1(\mathbb{R})$ (od anche solo $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$), ed ogni $a>0$:

$$f*\chi_{[-a,a]}(t)=\int_{\mathbb{R}}f(t-\theta)g(\theta)\,d\theta=\int_{\mathbb{R}}f(\theta)\chi_{[-a,a]}(t-\theta)\,d\theta=\int_{\mathbb{R}}f(\theta)\chi_{[t-a,t+a]}(\theta)\,d\theta=\int_{t-a}^{t+a}f(\theta)\,d\theta,$$

integrale di $f$ esteso a $[t-a,t+a]$. Si ha quindi, se $b>0$ è un'altra costante, per fissare le idee $b\le a$: $\chi_{[-a,a]}*\chi_{[-b,b]}(t)=\int_{t-b}^{t+b}\chi_{[-a,a]}(\theta)\,d\theta$, che vale ovviamente

$$\begin{cases}0 & \text{per } t+b\le -a\iff t\le-(a+b)\\ t+b-(-a)=t+(a+b) & \text{per } t-b\le -a<t+b\iff -(a+b)<t\le a-b\\ 2b & \text{per } -a<t-b,\ t+b<a\iff -(a-b)<t<a-b\\ a-(t-b)=(a+b)-t & \text{per } t-b\le a,\ t+b>a\iff a-b<t\le a+b\\ 0 & \text{per } a<t-b\iff a+b<t.\end{cases}$$

Si ha quindi una funzione con grafico a trapezio, e si noti che per $a = b$ si ha la funzione a triangolo nulla per $|t| > 2a$, che vale $t + 2a$ in $[-2a, 0]$ e $2a - t$ in $[0, 2a]$.

La convoluzione tra funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ è mutata dalla trasformazione di Fourier nel prodotto puntuale tra funzioni; si ha cioè l'importantissima regola:

0.4.1. *Trasformata della convoluzione.*

. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\Phi(f * g)(\nu) = \Phi f(\nu)\Phi g(\nu)$, per ogni $\nu \in \mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* Si ha, ammettendo di poter scambiare l'ordine di integrazione

$$\Phi(f * g)(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)g(\theta)\, d\theta \right) e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t-\theta)e^{-2\pi i\nu(t-\theta)}\, dt \right) g(\theta)e^{-2\pi i\nu\theta}\, d\theta =$$

(si è scritto $e^{-2\pi i\nu t} = e^{-2\pi i\nu(t-\theta)}e^{-2\pi i\nu\theta}$)

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)g(\theta)e^{-2\pi i\nu\theta}\, d\theta = \widehat{f}(\nu)\widehat{g}(\nu).$$

Ed è possibile scambiare l'ordine di integrazione dato che la funzione $(t, \theta) \mapsto |f(t-\theta)g(\theta)e^{-2\pi i\nu t}| = |f(t-\theta)||g(\theta)|$ sta in $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, come sopra visto. □

La precedente proposizione dice che la trasformazione di Fourier è un omomorfismo dell' algebra di convoluzione $L^1(\mathbb{R})$ nell'algebra $C_0(\mathbb{R})$ delle funzioni continue nulle all'infinito. L'algebra di convoluzione $L^1(\mathbb{R})$ non ha unità, non ha cioè un elemento neutro per la moltiplicazione; però ha unità approssimate; spieghiamo cosa ciò vuol dire. Accettiamo il seguente fatto (la cui dimostrazione è riportata sotto per i più curiosi).

**Lemma.** *Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ fissato, e sia $1 \le p < +\infty$. La funzione $t \mapsto \operatorname{tr}_t f$, che ad ogni $t \in \mathbb{R}$ associa la traslata di $f$ mediante $t$, è (uniformemente) continua da $\mathbb{R}$ ad $L^p(\mathbb{R})$.*

*Dimostrazione.* Si deve provare che dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che sia $\|\operatorname{tr}_t f - \operatorname{tr}_s f\|_p \le \varepsilon$ se $|t - s| \le \delta$. Poiché la norma $\|\cdot\|_p$ è invariante per traslazioni ($\|\operatorname{tr}_a g\|_p = \|g\|_p$ per ogni $g \in L^p(\mathbb{R})$, ed ogni $a \in \mathbb{R}$) si ha $\|\operatorname{tr}_t f - \operatorname{tr}_s f\| = \|\operatorname{tr}_{t-s} f - f\|_p$: basta provare la cosa per $s = 0$. La dimostrazione procede come segue: prima per le funzioni caratteristiche di intervalli, dove un disegno mostra subito che se $|t| \le b - a$ allora si ha

$$\|\operatorname{tr}_t \chi_{[a,b]} - \chi_{[a,b]}\|_p = 2^{1/p}|t|^{1/p};$$

per linearità la cosa è vera per le funzioni a scalino; infine, fissato $\varepsilon > 0$ si prende $g$ a scalino tale che sia $\|f - g\|_p \le \varepsilon$; esiste $\delta > 0$ tale che se $|t| \le \delta$ si ha $\|\operatorname{tr}_t g - g\|_p \le \varepsilon$; si ha allora

$$\begin{aligned}\|\operatorname{tr}_t f - f\|_p = \|\operatorname{tr}_t f - \operatorname{tr}_t g + \operatorname{tr}_t g - g + g - f\|_p \le \|\operatorname{tr}_t f - \operatorname{tr}_t g\|_p + \|\operatorname{tr}_t g - g\|_p + \|g - f\|_p = \\ \|f - g\|_p + \|\operatorname{tr}_t g - g\|_p + \|g - f\|_p \le 3\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Sia ora $g \in L^1(\mathbb{R})$, e supponiamo che sia $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1$. Per $\lambda > 0$ poniamo $g_\lambda(x) = \lambda g(\lambda x)$; si ha sempre $\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\, dx = 1$. Il grafico di $g_\lambda$ è ottenuto da quello di $g$ applicando orizzontalmente un'omotetia di rapporto $1/\lambda$, verticalmente un'omotetia di rapporto $\lambda$; al crescere di $\lambda$ i grafici vengono compressi orizzontalmente e dilatati verticalmente; l'integrale si concentra tutto nell'origine, nel senso che $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\delta}^{\delta} g_\lambda(x)\, dx = 1$ per ogni $\delta > 0$ fissato ( e quindi $\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{\mathbb{R}\smallsetminus[-\delta,\delta]} g_\lambda(x)\, dx = 0$): ciò è immediato, con il cambiamento di variabile $\lambda x = t$.

**Proposizione.** *Siano $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g_\lambda$ come sopra. Si ha allora, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \|f * g_\lambda - f\|_1 = 0;$$

*(cioè, $f * g_\lambda$ converge ad $f$ in $L^1(\mathbb{R})$).*

*Dimostrazione.* Si ha

$$f * g_\lambda(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-\xi)g_\lambda(\xi)\, d\xi - f(x)\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-\xi) - f(x)\lambda g(\lambda\xi)\, d\xi;$$

Posto $\lambda\xi = \eta$ si ottiene

$$f * g_\lambda(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-\eta/\lambda) - f(x))g(\eta)\, d\eta, \quad \text{da cui}$$

$$|f * g_\lambda(x) - f(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta/\lambda) - f(x)||g(\eta)|\,d\eta.$$

Integrando la disuguaglianza precedente su $\mathbb{R}$, ed invertendo l'ordine di integrazione a secondo membro si ottiene

$$\|f * g_\lambda - f\|_1 \le \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta/\lambda) - f(x)|\,dx\right)|g(\eta)|\,d\eta = \textstyle\int_{\mathbb{R}} \|\operatorname{tr}_{\eta/\lambda} f - f\|_1 |g(\eta)|\,d\eta;$$

si può ora usare il teorema della convergenza dominata per affermare che l'integrale tende a zero: al tendere di $\lambda$ a $+\infty$ la funzione $\eta \mapsto \|\operatorname{tr}_{\eta/\lambda} f - f\|_1 |g(\eta)|$ tende a 0, ed è dominata da $2\|f\|_1|g(\eta)|$. $\square$

Esercizio 6. Ripetendo parte della precedente dimostrazione si prova subito che se $f$ è in $C_0(\mathbb{R})$, più in generale se $f$ è limitata ed uniformemente continua, allora $f * g_\lambda$ converge *uniformemente* ad $f$ su $\mathbb{R}$.

Osservazione. Se invece $f \in L^2(\mathbb{R})$, allora la convoluzione $f * g_\lambda$ converge ad $f$ in $L^2(\mathbb{R})$; si ha infatti, da

$$|f * g_\lambda(x) - f(x)|^2 \le \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta/\lambda) - f(x)||g(\eta)|\,d\eta\right)^2;$$

detto $(h(x))^2$ il secondo membro, si ha

$$\|f * g_\lambda - f\|_2^2 \le \|h\|_2^2 =$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta/\lambda) - f(x)||g(\eta)|\,d\eta\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta/\lambda) - f(x)||g(\eta)|\,d\eta\right) h(x)\,dx =$$

applicando il teorema di Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta/\lambda) - f(x)|\,h(x)\,dx\right)|g(\eta)|\,d\eta \le \qquad \text{(disuguaglianza di Schwarz)}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-\eta/\lambda) - f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} (h(x))^2\,dx\right)^{1/2} |g(\eta)|\,d\eta =$$
$$\|h\|_2 \textstyle\int_{\mathbb{R}} \|\operatorname{tr}_{\eta/\lambda} f - f\|_2 |g(\eta)|\,d\eta.$$

Si ottiene infine

$$\|f * g_\lambda - f\|_2 \le \|h\|_2 \le \int_{\mathbb{R}} \|\operatorname{tr}_{\eta/\lambda} f - f\|_2 |g(\eta)|\,d\eta,$$

e si conclude come nella proposizione sopra.

Alcune unità approssimate sono nelle figure seguenti. Partendo da $g(x) = e^{-\pi x^2}$ si hanno i nuclei di Gauss, con $g(x) = \operatorname{sinc}^2 x$ i nuclei di Fèjer. Partendo dalla funzione caratteristica di $[-1/2, 1/2]$ si hanno pure unità approssimate. Si comprende anche perchè non ci sia un elemento neutro per la convoluzione. Se esso ci fosse, chiamiamolo $\delta$, sarebbe $\delta * g_\lambda = g_\lambda$, e $g_\lambda$ dovrebbe tendere in $L^1(\mathbb{R})$ a $\delta$; ma se prendiamo ad esempio i nuclei di Gauss $g_\lambda(x) = \lambda e^{-\pi\lambda^2 x^2}$ essi convergono puntualmente a 0 per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e cioè quasi ovunque; allora $\delta = 0$ quasi ovunque, ed in $L^1(\mathbb{R})$ ciò significa $\delta = 0$, assurdo!

0.4.2. *Regolarizzazione.* Un tipo particolare di approssimanti dell'unità ha importanti conseguenze matematiche. Si parte dalla funzione così definita:

$$\rho(x) = \frac{e^{1/(x^2-1)}}{c} \quad \text{se } |x| < 1; \quad \rho(x) = 0 \quad \text{se } |x| \ge 1,$$

dove $c = \int_{-1}^{1} e^{1/(x^2-1)}\,dx$; si ha $\rho(x) > 0$ se e solo se $-1 < x < 1$, altrimenti $\rho(x) = 0$; inoltre $\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx = 1$. Si dimostra (vedi l'inizio del capitolo sulle distribuzioni) che $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$; è chiaro che tutte le derivate di $\rho$ sono nulle per $|x| \ge 1$, di modo che tutte queste derivate stanno in $L^1(\mathbb{R})$. Ne segue che, posto $\rho_\lambda(x) = \lambda\rho(\lambda x)$, $\rho_\lambda$ è , per $\lambda \to +\infty$, un'approssimante dell'unità fatta con funzioni $C^\infty$. Non è difficile dimostrare, usando il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, vedi Analisi Due, teorema 9.22.2, (ii), che per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ le funzioni $f * \rho_\lambda$ sono tutte funzioni $C^\infty$; e si può anche facilmente dimostrare quanto segue:

. *Se $f \in C^m(\mathbb{R})$, con $m \ge 0$, allora per ogni fissato $k = 0, \dots, m$ la successione $D^k(f * \rho_\lambda)$ converge a $D^k f$ uniformemente su ogni intervallo compatto di $\mathbb{R}$, per $\lambda \to +\infty$.*

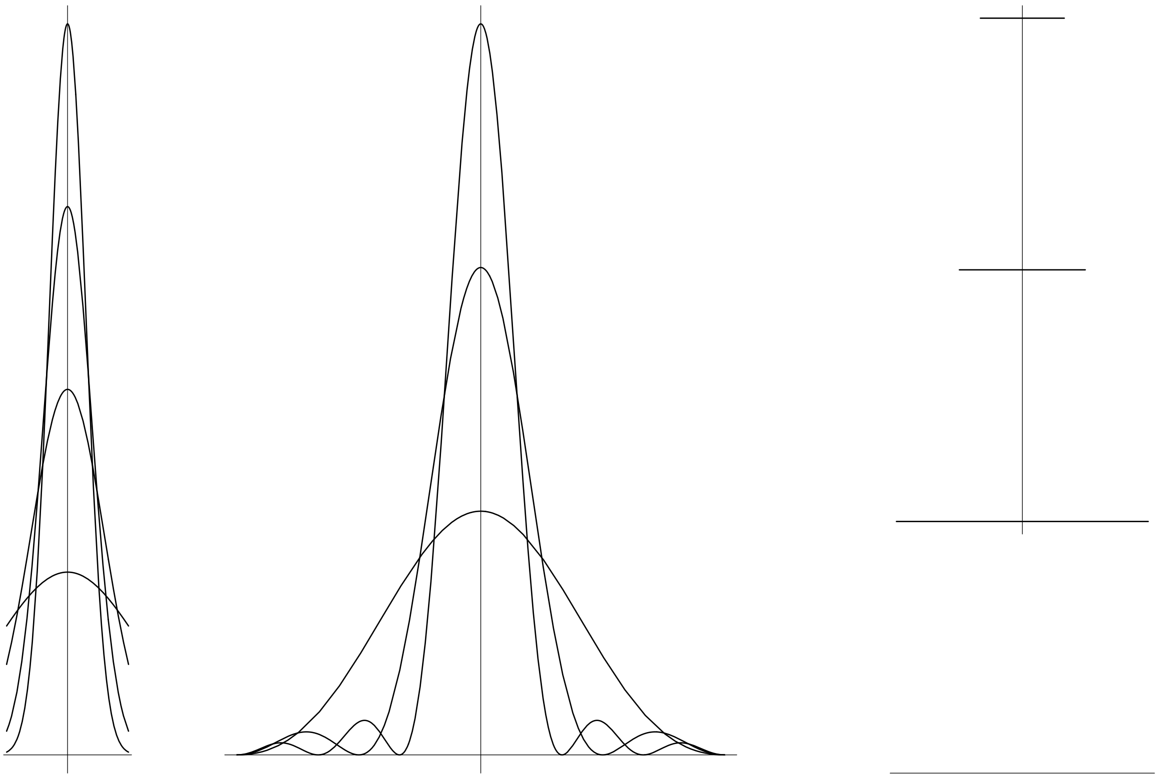

FIGURA 1. Nuclei di Gauss, di Fèjer, a scalino

0.5. **Formula di inversione.** È chiaramente di grande interesse essere in grado di ricostruire $f$ a partire dalla sua trasformata di Fourier. Riprendendo le considerazioni euristiche fatte all'inizio, una funzione periodica viene ricostruita a partire dal suo "spettro", successione dei coefficienti di Fourier, con la serie di Fourier. Nello schema seguito all'inizio siamo indotti a considerare la funzione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu,$$

ed a pensare che essa restituisca in qualche modo $f$.

**Definizione.** Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, la sua *antitrasformata di Fourier* è la funzione

$$\check{f}(t) = \tilde{\Phi} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu \, (= \Phi f(-\nu))$$

Trasformata ed antitrasformata godono ovviamente delle stesse proprietà; si ha anzi $\check{f}(x) = \widehat{f}(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè $\check{f} = \widetilde{(\widehat{f})} = \widehat{(\tilde{f})}$, per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$. Si ha la

**.** FORMULA DI INVERSIONE *Se $f$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$, e la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}$ appartiene pure ad $L^1(\mathbb{R})$, allora $f \in C_0(\mathbb{R})$ e si ha*

$$f(t) = (\check{\widehat{f}}) = \tilde{\Phi}(\Phi f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu, \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Vediamo quale difficoltà incontra un tentativo ingenuo di dimostrare direttamente la formula di inversione: dovendo calcolare

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(\theta) e^{-2\pi i \nu \theta}\, d\theta \right) e^{2\pi i \nu t}\, d\nu,$$

siamo indotti a scambiare l'ordine di integrazione, ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i (t-\theta)\nu}\, d\nu \right) f(\theta)\, d\theta,$$

ma l'integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(t-\theta)\nu}\, d\nu$ è chiaramente privo di senso. Di fatto, non è lecito scambiare l'ordine di integrazione perchè $(t,\theta) \mapsto |f(\theta)e^{-2\pi i\nu\theta}e^{2\pi i\nu t}| = |f(\theta)|$ non sta in $L^1(\mathbb{R}^2)$. La dimostrazione richiede di "smorzare" le funzioni con un conveniente fattore, che al limite sparirà; la differiamo alla successiva sezione. Osserviamo invece l'importante

**Corollario.** *La trasformazione di Fourier è iniettiva da $L^1(\mathbb{R})$ a $C_0(\mathbb{R})$.*

*Dimostrazione.* Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ tali che sia $\widehat{f} = \widehat{g}$; allora $\widehat{f-g} = 0$; la costante 0 sta in $L^1(\mathbb{R})$; per la formula di inversione, il suo originale di Fourier è nullo. Quindi $f - g = 0$, cioè , $f = g$. □

Dimostriamo qui il

. Lemma di dualità *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ allora si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\theta)g(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)\widehat{g}(\theta)\, d\theta.$$

*Dimostrazione.* Essendo

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\theta)g(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\theta t}\, dt \right) g(\theta)\, d\theta,$$

se è possibile scambiare l'ordine di integrazione si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\theta)g(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left( \int_{\mathbb{R}} g(\theta)e^{-2\pi i\theta t}\, d\theta \right)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\widehat{g}(t)\, dt,$$

e cioè la conclusione. I teoremi di Fubini–Tonelli dicono che ciò è possibile se l'integrale iterato

$$\int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \left|f(t)e^{-2\pi i\theta t}\right|\, dt \right) |g(\theta)|\, d\theta,$$

esiste finito; tale integrale iterato vale $\|f\|_1\|g\|_1$, e si conclude. □

Esercizio 7. Si è visto che la trasformata di Fourier di $f_a(t) = e^{-at^2}$ è $\sqrt{\pi/a}\, e^{-\pi^2\nu^2/a}$ Calcolare $f_a * f_b$ usando la trasformazione di Fourier $(a, b > 0)$.

*Risoluzione.* Si ha $\Phi(f_a * f_b)(\nu) = \Phi f_a(\nu)\Phi f_b(\nu)$, e quindi

$$\Phi(f_a * f_b)(\nu) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}} \exp\left(-\pi^2(1/a + 1/b)\nu^2\right);$$

Sia $c > 0$ tale che $1/c = 1/a + 1/b$, cioè $c = ab/(a + b)$. Cerchiamo l'originale di Fourier di

$$\Phi(f_a * f_b)(\nu) = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}\sqrt{c/\pi}\left(\sqrt{\pi/c}\, e^{-\pi^2\nu^2/c}\right),$$

che messo in questa forma è chiaramente

$$f_a * f_b(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}}e^{-ct^2} \qquad c = \frac{ab}{a+b}.$$

□

Esercizio 8. Dedurre dalla precedente formula che se si pone, per $\sigma > 0$:

$$G_\sigma(x) = \frac{e^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad \text{allora} \quad G_\sigma * G_\tau = G_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}};$$

mostrare poi che se si pone $P_a(x) = a/(\pi(x^2 + a^2))$ $(a > 0)$, allora $P_a * P_b = P_{a+b}$ (laborioso ma facile; si può trasformare alla Fourier oppure fare il calcolo diretto dell'integrale che definisce la convoluzione, usando il teorema dei residui).

0.5.1. *Dimostrazione della formula di inversione.* Partiamo dalla gaussiana che si trasforma in se stessa, $u(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$, e formiamo $u_\lambda(\nu) = u(\nu/\lambda) = e^{-\pi(\nu/\lambda)^2}$. Al tendere di $\lambda$ a $+\infty$, la funzione $\widehat{f}(\nu)u_\lambda(\nu)$ tende a $\widehat{f}(\nu)$ in $L^1(\mathbb{R})$, per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (infatti $0 < u_\lambda(\nu)$, e $u_\lambda(\nu) \uparrow 1$ per $\lambda \to +\infty$, quindi $|\widehat{f}(\nu)u_\lambda(\nu)| \leq |\widehat{f}(\nu)|$); ne segue che

$$\tilde{\Phi}(\widehat{f}u_\lambda)(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}u_\lambda(\nu)\, d\nu$$

converge uniformemente in $C_0(\mathbb{R})$ alla funzione $\tilde{\Phi}(\widehat{f})$. Osserviamo ora che si ha

$$(\widehat{e^{2\pi i\#t}u_\lambda(\#)})(\theta) = \mathrm{tr}_t\left(\lambda e^{-\pi(\lambda\#)^2}\right)(\theta) = \lambda e^{-\pi\lambda^2(\theta-t)^2} = g_\lambda(\theta - t)(= g_\lambda(t-\theta)),$$

avendo posto $g_\lambda(x) = \lambda e^{-\pi(\lambda x)^2}$, nuclei di Gauss, unità approssimata di convoluzione per $\lambda \to +\infty$, come visto nella precedente sezione. Il lemma di dualità porge allora

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}u_\lambda(\nu)\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)(\widehat{e^{2\pi i\#t}u_\lambda(\#)})(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)\lambda e^{-\pi\lambda^2(\theta-t)^2}\, d\theta = f * g_\lambda(t),$$

ed il secondo membro converge uniformemente a $\tilde{\Phi}(\widehat{f})$, e converge in $L^1(\mathbb{R})$ ad $f$; qualche sottosuccessione converge allora ad $f$ anche q.o., ma allora $f = \tilde{\Phi}\widehat{f}$. La dimostrazione del teorema di inversione è terminata.

0.6. **Trasformazione di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$.** Come nel caso delle serie di Fourier, la teoria in $L^2(\mathbb{R})$ è assai più simmetrica di quella in $L^1(\mathbb{R})$. Ci limitiamo a brevi considerazioni.

Se consideriamo l'insieme $X = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}$, esso è uno spazio vettoriale di funzioni, contenuto in $L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$; è immediato mostrare che $X$ è chiuso rispetto alla simmetrizzazione $f \mapsto \tilde{f}$, al coniugio $f \mapsto \bar{f}$, e che su esso la trasformata di Fourier $\Phi$ opera biiettivamente, con $\tilde{\Phi}$ come inversa (ma non esiste una caratterizzazione semplice delle funzioni di questo spazio). Si noti che $L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$; infatti ogni funzione limitata di $L^1$ sta in $L^2$, come risulta da $|f|^2 \leq \|f\|_\infty |f|$; ne segue che $X \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. La trasformazione di Fourier conserva il prodotto scalare tra elementi di $X$, si ha cioè

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)\overline{\widehat{g}(\nu)}\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\, dt; \qquad \text{per } f, g \in X.$$

Di fatto questo non è che il lemma di dualità: si ricorda che la trasformata di Fourier della coniugata è la simmetrizzata della coniugata della trasformata, e $\Phi(\Phi h) = \tilde{h}$, simmetrizzata di $h$; ne segue che si ha $\Phi\left(\overline{\widehat{g}}\right) = \bar{g}$. Ne segue che $\Phi$ induce un' isometria lineare di $X$ in se stesso, per le norme di $L^2$; se mostriamo che $X$ è denso in $L^2$, tale isometria si estende ad un'isometria di tutto $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso, detta *trasformazione di Fourier–Plancherel*, con inversa $\tilde{\Phi}$: per definire l'estensione basta, per $f \in L^2(\mathbb{R})$, prendere una successione $f_k$ di funzioni di $X$ che tenda ad $f$ nella norma di $L^2(\mathbb{R})$, e definire $\Phi f$ come il limite in $L^2$ di $\Phi f_k$.

Lo spazio $X$ è denso sia in $L^1(\mathbb{R})$ che in $L^2(\mathbb{R})$: infatti, se $g_\lambda(t) = \lambda\, e^{-\pi\lambda^2 t^2}$, ed $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f * g_\lambda \in X$: infatti $\widehat{f * g_\lambda}(\nu) = \widehat{f}(\nu)e^{-\pi(\nu/\lambda)^2}$, ed essendo $\widehat{f}$ limitata, e $\nu \mapsto e^{-\pi(\nu/\lambda)^2}$ in $L^1$, il prodotto sta in $L^1$. Se poi $f \in L^2(\mathbb{R})$, preso $\varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che $\|f - f\chi_{[-r,r]}\|_2 \leq \varepsilon/2$, ed esiste $\mu > 0$ tale che se $\lambda \geq \mu$ si ha $\|f\chi_{[-r,r]} - (f\chi_{[-r,r]}) * g_\lambda\|_2 \leq \varepsilon/2$; allora $\|f - (f\chi_{[-r,r]}) * g_\lambda\|_2 \leq \varepsilon$, e $(f\chi_{[-r,r]}) * g_\lambda \in X$, il che prova che $X$ è denso anche in $L^2(\mathbb{R})$.

Resta da provare che se $f$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata di Fourier–Plancherel è esattamente quella di Fourier; basta osservare che $f * g_\lambda$ converge ad $f$ sia in $L^1(\mathbb{R})$ che in $L^2(\mathbb{R})$ se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, come visto nell'osservazione 0.4.2.1.

Si è dimostrato il

. Teorema di Plancherel *La trasformazione di Fourier $\Phi : f \mapsto \widehat{f}$ si estende da $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ad un isomorfismo unitario (=isometrico) di $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso, che ha come inverso su $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ l'antitrasformata $\tilde{\Phi}$ (che ovviamente pure si estende, allo stesso modo, ad un isomorfismo isometrico di $L^2(\mathbb{R})$ in se stesso).*

La dimostrazione è stata fatta sopra. Il teorema di Plancherel fornisce quindi anche l'analogo dell'identità di Parseval: per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$ si ha $\|\Phi f\|_2^2 = \|f\|_2^2$, cioè

$$\int_{\mathbb{R}} |\Phi f(\nu)|^2\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, dt, \qquad \text{per ogni } f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Dal teorema di Plancherel discende che per trovare la trasformata di Fourier di una $f \in L^2(\mathbb{R})$ basta prendere il limite in $L^2$ delle trasformate di una qualunque successione di funzioni di $L^1$ che converga in $L^2$ ad $f$, ad esempio la successione $f\chi_{[-r,r]}$, come si fa nel successivo esempio.

Esempio 9. La funzione sinc è la trasformata di $\chi_{[-1/2,1/2]}$ come sopra visto. La sua trasformata di Fourier–Plancherel può essere calcolata come

$$\begin{aligned}\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sinc} t\, e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\cos(2\pi\nu t)\,dt = \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi(1+2\nu)t)-\sin(\pi(2\nu-1)t)}{2t}\,dt = \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi(2\nu+1)t)}{t}\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\pi(2\nu-1)t)}{t}\,dt = \\ \frac{\operatorname{sgn}(2\nu+1)}{2}-\frac{\operatorname{sgn}(2\nu-1)}{2}\end{aligned}$$

Si scrive talvolta rect per la funzione ottenuta, che è $\mathrm{rect}(\nu) = 1$ per $-1/2 < \nu < 1/2$, $\mathrm{rect}(\pm 1/2) = 1/2$, $\mathrm{rect}\,\nu = 0$ per $|\nu| > 1/2$, e coincide con la funzione caratteristica di $[-1/2, 1/2]$, salvo che in $\pm 1/2$. Si noti che $\mathrm{rect} * \mathrm{rect}(t) = (1 - |t|) \vee 0$, il triangolo.

Esercizio 10. Calcolare la trasformata di Fourier–Plancherel della funzione $f(t) = (t\sin t)/(1 + t^2)$. Suggerimento: usare il teorema dei residui per calcolare

$$V(\alpha) = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{i\alpha t}}{1+t^2}\,dt \qquad (\alpha\in\mathbb{R}),$$

e ricondurvi la richiesta trasformata. Mostrare, usando la trasformata, che $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

*Risoluzione.* La funzione è pari; si deve calcolare

$$\begin{aligned}\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\sin t}{1+t^2}\cos(2\pi\nu t)\,dt = \frac12\,\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}(\sin((2\pi\nu+1)t)-\sin((2\pi\nu-1)\nu t))\,dt = \\ \frac12\operatorname{Im}\left(\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{i(2\pi\nu+1)t}}{1+t^2}\,dt\right)-\frac12\operatorname{Im}\left(\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{i(2\pi\nu-1)t}}{1+t^2}\,dt\right);\end{aligned}$$

Supposto $\alpha > 0$ si può integrare $ze^{i\alpha z}/(1 + z^2)$ su semicerchi nel semipiano superiore; per il teorema dei residui ed il lemma di Jordan si ottiene:

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{te^{i\alpha t}}{1+t^2}\,dt = 2\pi i\operatorname{Res}(ze^{i\alpha z}/(1+z^2), i) = 2\pi i\frac{ie^{-\alpha}}{2i} = i\pi e^{-\alpha}.$$

La funzione $V(\alpha) = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{te^{i\alpha t}}{1+t^2}\,dt = i\,\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{t\sin(\alpha t)}{1+t^2}\,dt$ è dispari, come è immediato vedere; ne segue che si ha $V(\alpha) = \operatorname{sgn}\alpha\, i\pi e^{-|\alpha|}$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$: si ha in definitiva che la trasformata richiesta vale

$$F(\nu) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(2\pi\nu+1)e^{-|2\pi\nu+1|}-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(2\pi\nu-1)e^{-|2\pi\nu-1|}.$$

Tale trasformata ha due punti di discontinuità ($\pm 1/(2\pi)$) e quindi non è la trasformata di una funzione di $L^1(\mathbb{R})$, non essendo continua. □

Esercizio 11. Usando il teorema di Plancherel, dimostrare che l'insieme di funzioni $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$, dove $f_n(\nu) = e^{-2\pi i n\nu}\operatorname{sinc}\nu$, è ortonormale in $L^2(\mathbb{R})$.

*Risoluzione.* Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ la funzione $f_n$ è la trasformata di Fourier di $\chi_n = \mathrm{tr}_n\,\mathrm{rect}$, funzione caratteristica dell'intervallo $]n-1/2, n+1/2[$; poiché $\{\chi_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è un insieme ortonormale, e la trasformazione di Fourier conserva norme e prodotti scalari, tale è $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$. □

Esercizio 12. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ continua e $C^1$ a tratti, con $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(i) Mostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$ esiste finito, dedurne che i limiti $\lim_{t\to\pm\infty}(f(t))^2$ esistono finiti. Quanto valgono allora tali limiti?

(ii) Mostrare che si ha, per quasi ogni $\nu\in\mathbb{R}$:

$$\widehat{(f')}(\nu) = (2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)$$

(iii) Servirsi di questo risultato per calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$\frac{t\sin t+\cos t-1}{t^2}\ \left(=\frac{d}{dt}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)\right)$$

e calcolare anche l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t\sin t+\cos t-1}{t^2}\right)^2\,dt.$$

*Risoluzione.* (i) Si ricorda che il prodotto di due funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ sta in $L^1(\mathbb{R})$; ne segue che l'integrale è assolutamente convergente, in particolare esiste finito, ; inoltre si ha

$$\frac{d}{dt}(f(t))^2=2f(t)f'(t);\quad \text{quindi}\quad \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f'(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to+\infty}(f(t))^2-\lim_{t\to-\infty}(f(t))^2\right);$$

i limiti esistono quindi finiti, e dovendo $f^2$ stare in $L^1$, tali limiti devono essere nulli; quindi anche $\lim_{t\to\pm\infty}f(t)=0$.

(ii) Il teorema di Plancherel dice che per quasi ogni $\nu\in\mathbb{R}$ si ha:

$$\widehat{f'}(\nu)=\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}f'(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt=\lim_{r\to+\infty}\left(\left[f(t)e^{-2\pi i\nu t}\right]_{t=-r}^{t=r}+(2\pi i\nu)\int_{-r}^{r}f(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt\right)=$$

$$(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu),\quad \text{dato che i limiti all'infinito sono nulli.}$$

(iii) La trasformata di Fourier–Plancherel di $f(t)=(1-\cos t)/t$ è facile da calcolare; per disparità di $f$ resta solo il pezzo con il sin e si ha

$$\widehat{f}(\nu)=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t}\sin(2\pi\nu t)\,dt=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(2\pi\nu t)}{t}-\frac{1}{2}\frac{\sin((2\pi\nu+1)t)+\sin((2\pi\nu-1)t)}{t}\right)dt;$$

$$-i\left(\operatorname{sgn}\nu-\frac{\operatorname{sgn}(2\pi\nu+1)+\operatorname{sgn}(2\pi\nu-1)}{2}\right).$$

Se $\nu<-1/(2\pi)$ oppure se $\nu>1/(2\pi)$ la trasformata è nulla; se $-1/(2\pi)<\nu<0$ vale $i\pi$, se $0<\nu<1/(2\pi)$ vale $-i\pi$. La trasformata della derivata $f'$, per quanto appena visto, vale allora:

$$0\quad \text{se } |\nu|>1/(2\pi);\qquad 2\pi^2|\nu|\ \text{per } |\nu|<1/(2\pi).$$

Infine l'unitarietà della trasformata di Fourier dice che

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{t\sin t+\cos t-1}{t^2}\right)^2 dt=\int_{-1/(2\pi)}^{1/(2\pi)}(2\pi^2|\nu|)^2\,d\nu=8\pi^4\int_0^{1/(2\pi)}\nu^2\,d\nu=8\pi^4\,\frac{1}{3(2\pi)^3}=\frac{\pi}{3}.$$

□

Esercizio 13. Ricordando che la trasformata di Fourier–Plancherel di sinc è rect, calcolare la trasformata di

$$f(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{t}\right);$$

(usare quanto trovato all'esercizio precedente) calcolare poi la trasformata di $g(t)=(t\cos t-\sin t)/t^3$ ed infine l'integrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{(t\cos t-\sin t)^2}{t^6}\,dt.$$

*Risoluzione.* Essendo $\sin t/t=\operatorname{sinc}(t/\pi)$, la trasformata di $\sin t/t$ è $\pi\operatorname{rect}(\pi\nu)$ (che vale $\pi$ sull'intervallo $]-1/(2\pi),1/(2\pi)[$); la trasformata della derivata è quindi (esercizio precedente) $\widehat{f}(\nu)=(2\pi i\nu)\pi\operatorname{rect}(\pi\nu)$. Si ha $g(t)=f(t)/t$, da cui $(-2\pi it)g(t)=(-2\pi i)f(t)$; trasformando ambo i membri alla Fourier, a primo membro si trova $D\widehat{g}(\nu)$, a secondo $(-2\pi i)\widehat{f}(\nu)$. Essendo $\widehat{g}$ nulla all'infinito, si ha

$$\widehat{g}(\nu)=\int_{-\infty}^{\nu}(-2\pi i)\widehat{f}(\eta)\,d\eta=4\pi^3\int_{-1/(2\pi)}^{\nu}\eta\operatorname{rect}(\pi\eta)\,d\eta,$$

ed il calcolo conduce alla formula $\widehat{g}(\nu)=0$ per $|\nu|>1/(2\pi)$, $\widehat{g}(\nu)=2\pi^3(\nu^2-1/(2\pi)^2)$ per $|\nu|\le 1/(2\pi)$. Essendo unitaria la trasformazione di Fourier si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{g}(\nu)|^2\,d\nu=$$

$$4\pi^6\int_{-1/(2\pi)}^{1/(2\pi)}(\nu^2-1/(2\pi)^2)^2\,d\nu = 8\pi^6\int_0^{1/(2\pi)}(\nu^4-\nu^2/(2\pi^2)+1/(2\pi)^4)\,d\nu =$$
$$8\pi^6\left(\frac{1}{5\cdot 2^5\pi^5}-\frac{1}{3\cdot 2^4\pi^5}+\frac{1}{2^5\pi^5}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{15};$$

l'integrale richiesto vale quindi $\pi/15$. □

Esercizio 14. Dimostrare che ogni funzione continua, lineare a tratti, a supporto compatto ha la trasformata in $L^1(\mathbb{R})$. Più in generale, se $f\in L^1(\mathbb{R})$ è continua e $C^1$ salvo al più su un insieme finito di punti, ed $f'\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$

*Risoluzione.* Le derivate di tali funzioni sono infatti funzioni a scalino a supporto compatto, che hanno trasformata in $L^2(\mathbb{R})$, e quindi da $\widehat{f'}(\nu)=(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)$ si trae che $f(\nu)$, continua e dominata per $|\nu|\ge 1$ da $|\widehat{f'}|/|\nu|$, prodotto di funzioni che sono in $L^2(\mathbb{R}\diagdown]-1,1[)$, sta in $L^1(\mathbb{R})$. □

Esercizio 15. Sia $f\in L^1(\mathbb{R})$; supponiamo che $\nu\mapsto\nu\widehat{f}(\nu)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$. Mostrare che allora $f\in C^1(\mathbb{R})\cap C_0(\mathbb{R})$, anzi che posto $g(t)=\int_{\mathbb{R}}(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu$ si ha

$$f(t)=f(0)+\int_0^t g(\theta)\,d\theta.$$

*Risoluzione.* Chiaramente $\widehat{f}$, continua, sta in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$; e poiché per $|\nu|\ge 1$ si ha $|\widehat{f}(\nu)|\le|\nu\widehat{f}(\nu)|$, si ha anche $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R}\diagdown]-1,1[)$, e quindi $\widehat{f}\in L^1(\mathbb{R})$. Il teorema di inversione mostra che allora si ha $f\in C_0(\mathbb{R})$, ed $f(t)=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}\,d\nu$ per ogni $t\in\mathbb{R}$. Definito $g$ come nell'enunciato calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^t g(\theta)\,d\theta=\int_0^t\left(\int_{\mathbb{R}}(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu\theta}\,d\nu\right)d\theta=$$

(ammettiamo di poter scambiare gli integrali; dopo verifichiamo la liceità di tale azione)

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu\theta}\,d\theta\right)d\nu=\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)\left[e^{2\pi i\nu\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=t}d\nu=\int_{\mathbb{R}}(\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu t}-\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu 0})\,d\nu=$$
$$f(t)-f(0),$$

per la formula di inversione. Lo scambio degli integrali è lecito perché

$$(\nu,\theta)\mapsto|(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu\theta}|=2\pi|\nu\widehat{f}(\nu)|$$

appartiene ad $L^1(\mathbb{R}\times[0,t])$.

□

Il successivo esercizio è analogo al precedente, ma un poco più complicato.

Esercizio 16. Sia $f\in L^1(\mathbb{R})$; supponiamo che $\nu\mapsto\nu\widehat{f}(\nu)$ sia in $L^2(\mathbb{R})$. Mostrare che allora $\widehat{f}$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ e dedurne che $f$ appartiene a $C_0(\mathbb{R})$. Detta $g$ l'antitrasformata di Fourier–Plancherel di $(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)$, mostrare che si ha, per ogni $t\in\mathbb{R}$:

$$f(t)=f(0)+\int_0^t g(\theta)\,d\theta.$$

*Risoluzione.* Chiaramente $\widehat{f}$, continua, sta in $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$; dobbiamo provare che è sommabile all'infinito, e questo è immediato dato che $\nu\mapsto 1/\nu$ sta in $L^2(\mathbb{R}\diagdown]-1,1[)$, e quindi $\widehat{f}(\nu)=(1/\nu)(\nu\widehat{f}(\nu))$ sta in $L^1(\mathbb{R}\diagdown]-1,1[)$, in quanto prodotto di due funzioni appartenenti ad $L^2(\mathbb{R}\diagdown]-1,1[)$. Per il teorema d'inversione si ha allora $f=\tilde{\Phi}\widehat{f}\in C_0(\mathbb{R})$.

Poniamo ora, per $r>0$,

$$g_r(\theta)=\int_{-r}^{r}(2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu\theta}\,d\nu;$$

al tendere di $r$ a $+\infty$ $g_r$ converge in $L^2(\mathbb{R})$ a $g$; quindi $g_r$ converge a $g$ anche in $L^2([0,t])$ per ogni $t\in\mathbb{R}$ fissato, e quindi anche in $L^1([0,t])$. Ne segue che ha luogo il passaggio al limite sotto il segno di integrale, cioè che:

$$\int_0^t g(\theta)\,d\theta:=\int_0^t(\lim_{r\to+\infty}g_r(\theta))\,d\theta=\lim_{r\to+\infty}\int_0^t g_r(\theta)\,d\theta.$$

Si ha ora

$$\int_0^t g_(\theta)\,d\theta = \int_0^t \left(\int_{-r}^r (2\pi i\nu)\widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i\nu\theta}\,d\nu\right)d\theta =$$

(è chiaro che si può scambiare l'ordine di integrazione)

$$\int_{-r}^r \left(\int_0^t (2\pi i\nu)e^{2\pi i\nu\theta}\,d\theta\right)\widehat{f}(\nu)\,d\nu = \int_{-r}^r (e^{2\pi i\nu t} - e^{2\pi i\nu 0})\widehat{f}(\nu)\,d\nu =$$
$$\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu - \int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu 0}\,d\nu;$$

ed è chiaro che si ha, sempre per il teorema di inversione:

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu = f(t); \qquad \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu 0}\,d\nu = f(0);$$

la conclusione è raggiunta. □

0.7. **Antitrasformata di trasformate non in $L^1(\mathbb{R})$.** L'ipotesi $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ è molto esigente e non è verificata in molti casi interessanti. Sussiste però un teorema in tutto analogo a quello della convergenza puntuale delle serie di Fourier. Lo enunciamo in un modo che non è il più generale ma il più semplice da ricordare.

. Teorema di inversione puntuale *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ di classe $C^1$ a tratti. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha allora*

$$\frac{f(a^-)+f(a^+)}{2} = \mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i a\nu}\,d\nu := \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i a\nu}\,d\nu$$

*(l'esistenza del valore principale è parte della tesi).*

*Dimostrazione.* Come sopra detto, l'enunciato non è il più generale possibile. Ciò che useremo nella dimostrazione sarà il fatto seguente:

. *Se $a \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ sono tali che la funzione*

$$\theta \mapsto \frac{f(a+\theta)+f(a-\theta)-2c}{\theta}$$

*appartiene ad $L^1([0,\delta]$ per almeno un $\delta > 0$, allora il valore principale dell'enunciato esiste e coincide con $c$.*

È immediato vedere che se $f$ è $C^1$ a tratti allora la condizione precedente è verificata per ogni $a \in \mathbb{R}$, con $c = (f(a^-)+f(a^+))/2$. Nell'integrale

$$\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i a\nu}\,d\nu = \int_{-r}^r \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\,dt\right)e^{2\pi i a\nu}\,d\nu$$

possiamo scambiare l'ordine di integrazione (infatti la funzione $(t,\nu) \mapsto |f(t)e^{2\pi i\nu(a-t)}| = |f(t)|$ sta in $L^1(\mathbb{R}\times[-r,r])$, avendo su tale insieme integrale pari a $2r\|f\|_1$); si ottiene

$$\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i a\nu}\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-r}^r e^{2\pi i\nu(a-t)}\,d\nu\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i r(a-t)} - e^{-2\pi i r(a-t)}}{2\pi i(a-t)}\,f(t)\,dt =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi r(t-a))}{\pi(t-a)}\,f(t)\,dt$$

Posto nel precedente integrale $t-a=\theta$ si ottiene

$$\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i a\nu}\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi r\theta)}{\pi\theta}\,f(a+\theta)\,d\theta;$$

e posto $t-a=-\theta$ si ha anche

$$\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i a\nu}\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi r\theta)}{\pi\theta}\,f(a-\theta)\,d\theta;$$

Sommando membro a membro e dividendo per due si ha

$$\int_{-r}^r \widehat{f}(\nu)\,e^{2\pi i a\nu}\,d\nu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(a+\theta)+f(a-\theta)}{\theta}\,\sin(2\pi r\theta)\,d\theta$$

Sia ora $\delta > 0$ come nell'ipotesi aggiuntiva; scriviamo l'integrale a secondo membro come $\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{+\infty}$. Al tendere di $r$ a $+\infty$ il primo e l'ultimo integrale tendono a 0 per il lemma di Riemann–Lebesgue (è ovvio che la funzione $\theta \mapsto (f(a+\theta)+f(a-\theta))/\theta$ appartiene sia ad $L^1(]-\infty,-\delta]$ che ad $L^1([\delta,+\infty[)$. Si noti che $\theta \mapsto (f(a+\theta)+f(a-\theta))-2c)/\theta$ sta in $L^1([-\delta,\delta])$ (è dispari e per ipotesi sta in $L^1([0,\delta])$). Si ha alfine

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{f(a+\theta)+f(a-\theta)}{\theta}\sin(2\pi r\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{+\delta}\frac{f(a+\theta)+f(a-\theta)-2c}{\theta}\sin(2\pi r\theta)\,d\theta + \frac{c}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin(2\pi r\theta)}{\theta}\,d\theta.$$

Per il lemma di Riemann–Lebesgue il primo di questi integrali tende a 0; nel secondo si fa il cambiamento di variabile $2\pi r\theta = t$; si trova

$$\frac{c}{\pi}\int_{-2\pi r\delta}^{2\pi r\delta}\frac{\sin t}{t}\,dt,$$

che tende chiaramente a $c$ per $r$ tendente a $+\infty$ (ricordando che $\int_{-\infty}^{+\infty}(\sin t/t)dt = \pi$). La dimostrazione è conclusa. □

0.8. **Teorema del campionamento.** Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $\widehat{f}$ sia a supporto compatto: ogni tale $f$ si dice a *banda limitata*, e la sua *larghezza di banda* è il minimo $b > 0$ tale che sia $\mathrm{Supp}(\widehat{f}) \subseteq [-b,b]$. Per ogni $\nu_c \geq 2b$ la funzione $\widehat{f}$ può essere pensata come restrizione a $[-b,b]$ di una funzione in $L^2_{\mathrm{loc}}$ periodica di periodo $\nu_c$. Se chiamiamo $g$ tale funzione periodica, la sua serie di Fourier in periodo $\nu_c$ converge a $g$ in $L^2_{\nu_c}$; tale serie di Fourier è

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{in\omega_c\nu} \qquad \omega_c = 2\pi/\nu_c;$$

La serie di funzioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)e^{in\omega_c\nu}\,\mathrm{rect}(\nu/\nu_c),$$

converge allora in $L^2([-\nu_c/2,\nu_c/2])$, e quindi anche in $L^1([-\nu_c/2,\nu_c/2])$, alla funzione $\widehat{f}$; la serie delle antitrasformate

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\tilde{\Phi}\left(e^{in\omega_c\nu}\,\mathrm{rect}(\nu/\nu_c)\right),$$

converge allora sia uniformemente che in $L^2(\mathbb{R})$ all'antitrasformata di $\widehat{f}$ e cioè ad $f$; chiaramente poi l'antitrasformata di $e^{in\omega_c\nu}\,\mathrm{rect}(\nu/\nu_c)$ è la traslata di $-n\omega_c/(2\pi) = -n/\nu_c$ dell'antitrasformata di $\mathrm{rect}(\nu/\nu_c)$, che è a sua volta $\nu_c\,\mathrm{sinc}(\nu_c t)$; si ha insomma, uniformemente in $\mathbb{R}$ (ed anche in $L^2(\mathbb{R})$):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(g)\nu_c\,\mathrm{sinc}(\nu_c(t+n/\nu_c));$$

si ha poi (si noti che che $f = \tilde{\Phi}(\widehat{f})$ è continua, anzi è traccia su $\mathbb{R}$ di una funzione olomorfa intera, dato che $\widehat{f}$ è a supporto compatto)

$$c_n(g) = \int_{-\nu_c/2}^{\nu_c/2}\widehat{f}(\nu)e^{-in\omega_c\nu}\frac{d\nu}{\nu_c} = \frac{1}{\nu_c}\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\nu)e^{2\pi i(-n/\nu_c)\nu}\,d\nu = \frac{f(-n/\nu_c)}{\nu_c}$$

si ottiene:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n/\nu_c)\,\mathrm{sinc}(\nu_c t + n)$$

e sommando nell'ordine inverso, posto $\tau_c = 1/\nu_c$, si ha alfine:

**.** Formula del campionamento (Shannon) *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ è a banda limitata, con larghezza di banda $b > 0$, si ha, se $\nu_c \geq 2b$, posto $\tau_c = 1/\nu_c$:*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\tau_c)\,\mathrm{sinc}(\nu_c(t-n\tau_c)) \qquad \textit{uniformemente in } \mathbb{R}, \textit{ ed in } L^2(\mathbb{R}).$$

La dimostrazione è stata fatta sopra. Il risultato dice che $f$, nelle ipotesi dette, può essere ricostruita dal suo campionamento fatto sui punti $\mathbb{Z}\tau_c = \{\dots, -2\tau_c, -\tau_c, 0, \tau_c, 2\tau_c, \dots\}$; dovendo essere $\tau_c \le 1/(2b)$, più larga è la banda di $f$ e più fitto deve essere il campionamento.

0.9. **Altre definizioni della trasformazione di Fourier.** La trasformazione di Fourier è essenzialmente unica, ma ha comunque varie definizioni tra loro vicine. Ogni trasformazione di Fourier che si incontra è della forma

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ip\xi x}\,dx,$$

dove $p, h$ sono costanti reali non nulle. Definita in questo modo, essa non è in generale unitaria su $L^2(\mathbb{R})$, e la trasformata della convoluzione non è il prodotto puntuale delle trasformate, solo proporzionale ad esso mediante il fattore $h$. Si ha comunque $\mathcal{F}f(\xi) = \Phi f(p\xi/(2\pi))/h$; di qui è facile dedurre la formula di inversione per $\mathcal{F}$: essendo, per $\Phi f \in L^1(\mathbb{R})$, $f(t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi f(\nu)e^{2\pi i\nu t}\,d\nu$, basta porre in tale integrale $\nu = p\xi/(2\pi)$; si ottiene

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \Phi f(p\xi/(2\pi))e^{ip\xi t}\frac{|p|}{2\pi}\,d\xi = \frac{|p|h}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)e^{ip\xi t}\,d\xi,$$

da cui la

FORMULA DI INVERSIONE

$$\text{Se } \mathcal{F}f := \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ip\xi x}\,dx \in L^1(\mathbb{R}), \text{ allora } \quad f(x) = \frac{|p|h}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)e^{ip\xi x}\,d\xi.$$

Dedichiamo un rapidissimo cenno alla trasformazione di Fourier in più variabili; essa è definita, per $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, come

$$\Phi f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(\xi|x)}\,dx, \quad \text{inversione } \tilde{\Phi}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)e^{2\pi i(x|\xi)}\,d\xi$$

dove $(\xi|x)$ è il solito prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Vale ancora il teorema di Plancherel. Inoltre

**.** *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e per un $m \in \mathbb{N}$ si ha che $x \mapsto (1+|x|)^m|f(x)|$ sta in $L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $\widehat{f} \in C^m(\mathbb{R}^n)$, e per ogni multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ di grado non maggiore di $m$ si ha*

$$\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = ((-2\pi i\#)^\alpha)f)\widehat{\ }(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i x)^\alpha f(x)e^{-2\pi i(\xi|x)}\,dx.$$

come facilmente si vede derivando sotto il segno di integrale. L'integrazione per parti mostra poi che si ha:

**.** *Se $f \in C^m(\mathbb{R}^n)$, ed $m \in \mathbb{N}$ è tale che $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ per ogni multiindice $\alpha$ di grado non maggiore di $m$, allora*

$$(\partial^\alpha f)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

Ci limitiamo a provare l'importante fatto seguente

**.** *Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è lineare ed invertibile, ed $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora $f \circ T$ ha per trasformata di Fourier $\widehat{f}((T^{-1})^*\xi)/|\det T|$. Di conseguenza la trasformata di Fourier di una funzione a simmetria sferica è ancora a simmetria sferica ($(T^{-1})^*$ è la trasposta di $T^{-1}$).*

*Dimostrazione.* Nell'integrale che definisce $\widehat{f} \circ T$ si fa il cambiamento di variabili $y = Tx$:

$$\widehat{(f\circ T)}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Tx)e^{-2\pi i(\xi|x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i(\xi|T^{-1}y)}|\det T^{-1}|\,dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi i((T^{-1})^*\xi|y)}|\det T^{-1}|\,dy = \frac{\widehat{f}((T^{-1})^*\xi)}{|\det T|}.$$

□

0.10. **Miscellanea sulla convoluzione.**

0.10.1. *Convoluzione e altre operazioni.* Date $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si mostri che

- La simmetrizzata della convoluzione è il prodotto di convoluzione delle simmetrizzate: $\widetilde{(f*g)} = \tilde{f} * \tilde{g}$.
- Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $\tau_a(f*g) = (\tau_a f)*g = f*(\tau_a g)$.

0.10.2. *Altri casi di convoluzione.* Dimostrare che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ (cioè $g$ è misurabile e limitata) allora $f * g$ esiste, sta in $L^\infty(\mathbb{R})$ e si ha

$$\|f * g\|_\infty \le \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

(usando la continuità uniforme di $a \mapsto \tau_a f$ da $\mathbb{R}$ ad $L^1(\mathbb{R})$ si potrebbe anche provare che $f * g$ è uniformemente continua).

Cos'è la convoluzione $f * e^{2\pi i a \#}(t)$ di $f$ con un carattere?

Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, interpretare le funzioni

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad \int_{x}^{+\infty} f(t)\, dt$$

come convoluzioni di $f$ con convenienti funzioni limitate.

0.10.3. *Convoluzione di funzioni periodiche.* Se $f, g \in L^1_\tau$, si può definire la loro convoluzione:

$$f * g(x) := \int_{(\tau)} f(x - \xi) g(\xi)\, \frac{d\xi}{\tau},$$

(al solito $\int_{(\tau)}$ denota un integrale esteso ad un intervallo–periodo). Essa risulta periodica di periodo $\tau$, come è immediato vedere. Si dimostri (esercizio) che per i coefficienti di Fourier si ha

$$c_n(f * g) = c_n(f) c_n(g).$$

0.10.4. *Convoluzione fra $L^1$ ed $L^p$.* Si può dimostrare (ma non è del tutto immediato) che se $f$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ e $g$ appartiene ad $L^p(\mathbb{R})$ (con $1 \le p \le \infty$), allora $f * g$ sta in $L^p(\mathbb{R})$ e si ha

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \, \|g\|_p.$$

0.10.5. *L'equazione unidimensionale del calore.* Rimandando ad Analisi Due, 8.18, per l'impostazione dell'equazione del calore, risolviamo qui con la trasformazione di Fourier il caso della sbarra illimitata; la risoluzione ha carattere euristico, ma si può dimostrare che effettivamente fornisce una soluzione (in molti casi). Il problema è il seguente: risolvere l'equazione alle derivate parziali

$$\partial_t u(x, t) = \kappa\, \partial_x^2 u(x, t), \qquad (\kappa > 0 \text{ costante})$$

dove la funzione incognita $u(x, t)$ è continua in $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, e di classe $C^1$ in $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$; c'è la condizione iniziale $u(x, 0) = u_0(x)$; $u(x, t)$ è la temperatura all'istante $t$ del punto della sbarra che ha ascissa $x$. Fissato $t > 0$, si trasforma alla Fourier rispetto ad $x$, ritenendo ciò possibile, si ritiene anche di poter scambiare la trasformata di Fourier con la derivazione rispetto a $t$, che sia cioè

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(x, t)\, e^{-2\pi i x \xi}\, dx = \partial_t \left( \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-2\pi i x \xi}\, dx \right) = \partial_t \widehat{u}(\xi, t)$$

A secondo membro la formula per la trasformata della derivata fornisce

$$\Phi_x \left( \kappa\, \partial_x^2 u(x, t) \right)(\xi) = (2\pi i \xi)^2 \kappa\, \widehat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \kappa\, \widehat{u}(\xi, t).$$

Trasformando abbiamo quindi ottenuto l'equazione ordinaria (nella variabile indipendente $t$)

$$\partial_t \widehat{u}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \kappa\, \widehat{u}(\xi, t),$$

da integrare con la condizione iniziale $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi)$, trasformata di Fourier del dato iniziale $u_0$. L'equazione è lineare del primo ordine ed ha come soluzione

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}_0(\xi)\, e^{-4\pi^2 \xi^2 \kappa t}$$

Se $t > 0$, la funzione $x \mapsto e^{-x^2/(4\kappa t)}/(2\sqrt{\pi \kappa t})$ ha come trasformata di Fourier la funzione $\xi \mapsto e^{-4\pi^2 \xi^2 \kappa t}$; ne segue

$$u(x, t) = u_0 * e^{-x^2/(4\kappa t)}/(2\sqrt{\pi \kappa t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(s)\, e^{-(x-s)^2/(4\kappa t)}\, ds$$

soluzione di Poisson per l'equazione del calore. Si noti che se si pone $v_t(x) = e^{-x^2/(4\kappa t)}/(2\sqrt{\pi \kappa t})$ si ha $v_t(x) = (1/\sqrt{t}) v_1(x/\sqrt{t})$, e $\int_{\mathbb{R}} v_1(x)\, dx = 1$; per $t \to 0^+$ la famiglia di funzioni $v_t$ è un'unità approssimata.

0.10.6. *Equazione delle onde.* Sia $c > 0$ fissato. L'equazione unidimensionale delle onde è la seguente equazione alle derivate parziali

$$\partial_x^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Consideriamo per tale equazione il problema di Cauchy: fissiamo $u_0(x) = u(x,0)$ (posizione iniziale) e $v_0(x) = \partial_t u(x,0)$ (velocità iniziale) e cerchiamo le $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ che verificano l'equazione e queste condizioni iniziali. C'è una risoluzione elementare presentata in Analisi Due, 4.26. Ritroviamo la stessa soluzione servendoci (euristicamente) della trasformazione di Fourier. Poniamo

$$\widehat{u}(\xi,t) = \Phi_x(u(x,t))(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x,t)\, e^{-2\pi i\xi x}\, dx;$$

supponiamo ancora che la derivazione rispetto a $t$ e la trasformata di Fourier rispetto ad $x$ siano permutabili; si ottiene, trasformando l'equazione assegnata:

$$-(4\pi^2\xi^2c^2)\widehat{u}(\xi,t) - \partial_t^2\widehat{u}(\xi,t) = 0.$$

Per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ fissato questa è un'equazione lineare del secondo ordine, con $t$ come variabile indipendente, da risolvere con le condizioni iniziali $\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi)$ e $\partial_t\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{v}_0(\xi)$. L'equazione caratteristica è $\zeta^2 = -(4\pi^2\xi^2c^2)$, con soluzioni $\zeta = \pm i2\pi c\xi$; le soluzioni sono quindi

$$\widehat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos(2\pi ct\xi) + c_2(\xi)\sin(2\pi ct\xi);$$

imponendo le condizioni iniziali si trova $c_1(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$ e $c_2(\xi) = \widehat{v}_0(\xi)/(2\pi c\xi)$ per cui

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{u}_0(\xi)\cos(2\pi ct\xi) + t\widehat{v}_0(\xi)\,\mathrm{sinc}(2ct\xi);$$

ora antitrasformando:

$$\bar{\Phi}_\xi\left(\widehat{u}_0(\xi)\cos(2\pi ct\xi)\right) = \frac{1}{2}\bar{\Phi}_\xi\left(\widehat{u}_0(\xi)e^{2\pi ict\xi} + \widehat{u}_0(\xi)e^{-2\pi ict\xi}\right) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2};$$

La funzione $\xi \mapsto t\,\mathrm{sinc}(2ct\xi)$ si antitrasforma in $\mathrm{rect}(x/(2ct))/(2c)$; pertanto

$$\bar{\Phi}_\xi(t\widehat{v}_0(\xi)\,\mathrm{sinc}(2ct\xi) = \frac{1}{2c}v_0 * \mathrm{rect}(\#/(2ct)).$$

La soluzione trovata è quindi (si osservi che $\mathrm{rect}(x-\theta)/(2ct))$ è la funzione caratteristica dell'intervallo di estremi $x - ct, x + ct$):

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{\theta=x-ct}^{\theta=x+ct} v_0(\theta)\, d\theta,$$

che è esattamente la soluzione data da d'Alembert per l'equazione delle onde.

## 0.11. **Esercizi ricapitolativi.**

Esercizio 1. Vogliamo trovare una soluzione del seguente *problema di Dirichlet*: trovare una funzione $u(x,y)$ che sia armonica nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e sia tale che $u(x,0) = f(x)$, dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è assegnata. Cerchiamo cioè una soluzione dell'equazione $\partial_x^2 u(x,y) + \partial_y^2 u(x,y) = 0$, per $y > 0$, con $u(x,0) = f(x)$.

(i) Trasformando alla Fourier rispetto ad $x$ per $y > 0$ trovare un'equazione ordinaria per $\widehat{u}(\xi,y)$.
(ii) Risolvere l'equazione trovata in (i), supponendo che $x \mapsto u(x,y)$ sia in $L^1(\mathbb{R})$ per ogni $y > 0$, ed anche che sia $f \in L^1(\mathbb{R})$.
(iii) Antitrasformare e trovare una formula integrale per la soluzione.
(iv) Trovare una formula senza integrali per la soluzione nel caso $f = \chi_{[-1,1]}$.
(v) [Extra] Come si potrebbe procedere per dimostrare che quella trovata in (iii) è effettivamente una soluzione dell'equazione data?

*Risoluzione.* (i) Si trova

$$(2\pi i\xi)^2\widehat{u}(\xi,y) + \partial_y^2\widehat{u}(\xi,y) = 0 \quad \text{cioè} \quad \partial_y^2\widehat{u}(\xi,y) - 4\pi^2\xi^2\widehat{u}(\xi,y) = 0.$$

Si tratta di un'equazione del secondo ordine a coefficienti costanti; conviene scrivere la soluzione generale come

$$\widehat{u}(\xi,y) = c_1(\xi)e^{2\pi|\xi|y} + c_2(\xi)e^{-2\pi|\xi|y};$$

dato che deve essere $\lim_{\xi\to\pm\infty}\widehat{u}(\xi,y)=0$ deve essere $c_1(\xi)=0$; imponendo la condizione iniziale si trova $c_2(\xi)=\widehat{f}(\xi)$; in definitiva

$$\widehat{u}(\xi,y)=\widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|y}.$$

Abbiamo risposto anche ad (ii).

(iii) Si noti che $\xi\mapsto e^{-2\pi|\xi|y}$ è la trasformata di Fourier di $(1/\pi)y/(x^2+y^2)$, se $y>0$; antitrasformando si trova quindi

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(u)\,du}{(x-u)^2+y^2}.$$

(iv) Se $f=\chi_{[-1,1]}$ si ha

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{du}{(x-u)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{du/y}{1+((u-x)/y)^2}=\frac{\arctan((x+1)/y)-\arctan((x-1)/y)}{\pi}.$$

(v) Il metodo è quello di derivare sotto il segno di integrale per due volte. Si può osservare che la funzione

$$(x,y)\mapsto\frac{y}{(x-u)^2+y^2}$$

è armonica nelle variabili $(x,y)$, qualunque sia il parametro $u\in\mathbb{R}$ fissato (infatti $(x,y)\mapsto y/(x^2+y^2)$ è, a meno del segno, la parte immaginaria di $1/(x+iy)$). Se è possibile derivare due volte sotto il segno di integrale la convoluzione risulta allora armonica. Per la derivata rispetto ad $x$ dell'integrando; essa è

$$\frac{1}{\pi}\frac{-2y(x-u)f(u)}{((x-u)^2+y^2)^2};$$

una maggiorazione che mostra l'applicabilità del teorema di derivazione sotto il segno di integrale è ad esempio (presi $\alpha,\beta$ con $\alpha>|x|$ e $0<\beta<y$):

$$\left|\frac{-2y(x-u)f(u)}{((x-u)^2+y^2)^2}\right|\le\frac{2|y|\,|x-u|}{((x-u)^2+y^2)^2}\le\frac{1}{(x-u)^2+y^2}\le\frac{1}{(\alpha+|u|^2)+\beta^2},$$

maggiorazione valida per $|x|<\alpha$ e $y>\beta$; similmente per $y$, se $\gamma>y$ si ha

$$\left|\frac{-2y}{((x-u)^2+y^2)^2}\right|\le\frac{2\gamma}{((\alpha+|u|^2)+\beta^2)^2}\qquad\text{valida per}\qquad|x|<\alpha,\ \beta<y<\gamma;$$

e si intuisce che la cosa si può fare anche per le derivate di ordine superiore.

Diverso e un poco più complicato è il discorso sulla saldatura continua al dato iniziale quando questo è continuo. Esso deriva dal fatto che il nucleo di convoluzione è unità approssimata per $y\to0^+$, ma non lo facciamo. □

Esercizio 2. Utilizzando la trasformazione di Fourier, calcolare le eventuali soluzioni dell'equazione differenziale

$$y''+2\pi ty'+2\pi y=0,$$

che stanno in $L^1(\mathbb{R})$, assieme con le loro derivate prime e seconde.

*Risoluzione.* Detta $u$ una tale soluzione, trasformiamo alla Fourier trovando

$$(2\pi i\nu)^2\widehat{u}(\nu)-\frac{1}{i}\frac{d}{d\nu}((2\pi i\nu)\widehat{u}(\nu))+2\pi\widehat{u}(\nu)=0,$$

da cui

$$-4\pi^2\nu^2\widehat{u}(\nu)-2\pi\widehat{u}(\nu)-2\pi\widehat{u}'(\nu)+2\pi\widehat{u}(\nu)=0\iff\widehat{u}'(\nu)=-2\pi\nu^2\widehat{u}(\nu),$$

da cui $\widehat{u}(\nu)=\widehat{u}(0)e^{-\pi\nu^2}$. Poiché $e^{-\pi\nu^2}$ è la trasformata di Fourier di $e^{-\pi t^2}$, le soluzioni sono $u(t)=ke^{-\pi t^2}$, con $k$ costante arbitraria. □

Esercizio 3. Per ogni $f\in L^1(\mathbb{R})$ sono definite due funzioni:

$$Af(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(2\pi\nu t)\,dt;\qquad Bf(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin(2\pi\nu t)\,dt,$$

che sono dette rispettivamente *cosen–trasformata e sin–trasformata* di Fourier di $f$. Dopo aver osservato che $Af$ è sempre pari e $Bf$ è sempre dispari (ovvio, accettarlo), dimostrare, usando il teorema di inversione:

. Formula di inversione, forma reale *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ è tale che $Af$, $Bf \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \in C_0(\mathbb{R})$, e si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$:*

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (Af(\nu)\cos(2\pi\nu t) + Bf(\nu)\sin(2\pi\nu t))\, d\nu.$$

*Risoluzione.* Osserviamo che si ha

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)(\cos(2\pi\nu t) - i\sin(2\pi\nu t))\, dt = Af(\nu) - iBf(\nu);$$

da ciò si deduce che se $Af, Bf$ stanno in $L^1(\mathbb{R})$ allora anche $\widehat{f}$ sta in $L^1(\mathbb{R})$. Ne segue che $f \in C_0(\mathbb{R})$, e che si ha, per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t}\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} (Af(\nu) - iBf(\nu))(\cos(2\pi\nu t) + i\sin(2\pi\nu t))\, d\nu =$$

$$\int_{\mathbb{R}} (Af(\nu)\cos(2\pi\nu t) + Bf(\nu)\sin(2\pi\nu t))\, d\nu + i\int_{\mathbb{R}} (Af(\nu)\sin(2\pi\nu t) - Bf(\nu)\cos(2\pi\nu t))\, d\nu;$$

per disparità si ha

$$\int_{\mathbb{R}} Af(\nu)\sin(2\pi\nu t)\, d\nu = \int_{\mathbb{R}} Bf(\nu)\cos(2\pi\nu t)\, d\nu = 0,$$

e la conclusione è raggiunta.

□

Esercizio 4. Sapendo che è

$$\mathrm{vp}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\sinh x}\, dx = i\pi\tanh(\alpha\pi/2) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

calcolare la trasformata di Fourier della funzione $f(t) = t/\sinh t$ (integrare $g(z) = ze^{i\alpha z}/\sinh z$ sui rettangoli di vertici $r, r + i\pi, -r + i\pi, -r$, indentati se occorre; accettare il fatto che sui lati verticali l'integrale tenda a zero). Dedurne il valore dell'integrale $\int_{\mathbb{R}}(t^3/\sinh t)\, dt$.

*Risoluzione.* (Schematica) $\sinh z = 0$ per $z = k\pi i$; si indenta il rettangolo in $i\pi$ con un piccolo semicerchio $\sigma_s(\vartheta) = i\pi + se^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [\pi, 2\pi]$; si ottiene

$$\int_{-r}^{r} \frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x} - \int_{[-r,r]\setminus]-s,s[} \frac{(x + i\pi)e^{i\alpha(x+i\pi)}}{\sinh(x + i\pi)}\, dx$$
$$- \int_{\sigma_s} \frac{ze^{i\alpha z}}{\sinh z}\, dz + \varepsilon(r) = 0$$

Si ha

$$\frac{(x + i\pi)e^{i\alpha(x+i\pi)}}{\sinh(x + i\pi)} = -e^{-\alpha\pi}\frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x} - i\pi e^{-\alpha\pi}\frac{e^{i\alpha x}}{\sinh x}$$

per cui quanto sopra si riscrive

$$\int_{-r}^{r} \frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\, dx + e^{-\alpha\pi}\int_{[-r,r]\setminus]-s,s[} \frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\, dx + i\pi e^{-\alpha\pi}\int_{[-r,r]\setminus]-s,s[} \frac{e^{i\alpha x}}{\sinh x}\, dx$$
$$- \int_{\sigma_s} \frac{ze^{i\alpha z}}{\sinh z}\, dz + \varepsilon(r) = 0$$

per il lemma del cerchio piccolo l'integrale su $\sigma_s$ tende, per $s \to 0^+$, a $i\pi\,\mathrm{Res}(f, i\pi) = i\pi(i\pi)e^{-\alpha\pi}/(-1) = \pi^2 e^{-\alpha\pi}$; si ottiene

$$(1 + e^{-\alpha\pi})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\, dx - \pi^2 e^{-\alpha\pi}\tanh(\alpha\pi/2) = \pi^2 e^{-\alpha\pi}$$

ed infine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{i\alpha x}}{\sinh x}\, dx = \pi^2 e^{-\alpha\pi}\left(\frac{1 - e^{-\alpha\pi}}{(1 + e^{-\alpha\pi})^2} + \frac{1}{1 + e^{-\alpha\pi}}\right) = \pi^2 e^{-\alpha\pi}\frac{2}{(1 + e^{-\alpha\pi})^2} =$$
$$\pi^2\frac{2}{(e^{\alpha\pi/2} + e^{-\alpha\pi/2})^2} = \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\cosh^2(\alpha\pi/2)}$$

□

## Aggiunte sulle serie di Fourier

0.12. **Sviluppi di soli seni e di soli coseni.** Sia $l > 0$ fissato, e sia $f : [0, l] \to \mathbb{C}$ funzione in $L^2([0, l])$. È spesso utile avere uno sviluppo di tale funzione in $[0, l]$ che sia di soli seni, o di soli coseni. C'è un unico modo per farlo, se si pretende che tali seni o coseni abbiano tutti periodo non maggiore di $2l$ (a meno che la funzione non sia già restrizione a $[0, l]$ di una funzione di periodo sottomultiplo intero di $l$): se si vuole una serie di soli coseni si estende prima la funzione per parità all'intervallo $[-l, l]$, poi la si prolunga in periodicità $2l$ all'intero asse reale; se si vuole una serie di soli seni si estende invece prima per disparità a $[-l, l]$, poi come sopra per periodicità; i valori in $-l, l$ possono essere diversi, come il prolungamento per disparità in 0 deve essere 0, indipendentemente dal valore $f(0)$ di partenza; ma chiaramente ciò altera l'estensione a $[-l, l]$ solo su un insieme di misura nulla.

Esercizio 5. Sviluppare $f(x) = \sin x$ in serie di soli coseni, e sviluppare poi $f(x) = \cos x$ in serie di soli seni, entrambi in $[0, \pi]$.

*Risoluzione.* Il prolungamento pari $g$ di sin è $\sin |x|$, per $x \in [-\pi, 0]$; i coefficienti sono (il periodo è $2\pi$):

$$a_n = a_n(g) = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin |x| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\, dx;$$

si trova $a_0 = 4/\pi$, mentre, se $n \geq 1$ si ha

$$\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x))\, dx;$$

per $n = 1$ si trova quindi $a_1 = (2/\pi)\int_0^{\pi} \sin(2x)\, dx = 0$, mentre se $n \geq 2$ si ha

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1 - \cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{1 - \cos((n-1)\pi)}{n-1}\right) = -\frac{1 + (-1)^n}{\pi}\frac{2}{n^2 - 1}.$$

Se $n$ è dispari si trova quindi $a_n = 0$; se $n = 2k$ è pari si ha

$$a_{2k} = \frac{-4}{\pi(4k^2 - 1)},$$

e quindi

$$\sin x = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}\right) \qquad 0 \leq x \leq \pi,$$

la convergenza essendo anche totale. Se poi prolunghiamo per disparità cos in $[-\pi, 0[$, i coefficienti diventano:

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin(nx)\, dx$$

se $n = 1$ si trova $b_1 = 0$, mentre, se $n \geq 2$:

$$\pi b_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + (-1)^n}{n+1} + \frac{1 + (-1)^n}{n-1}\right) = \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1};$$

si ha quindi $b_n = 0$ se $n$ dispari e

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{k}{4k^2 - 1}\sin(2kx) \qquad (0 < x < \pi);$$

si noti che la convergenza non è più uniforme, e quella puntuale si ha solo all'interno. □

Esercizio 6. Sviluppare la funzione $f(x) = |\sin x|^3$ in serie di coseni, nell'intervallo $[0, \pi]$ (si può usare l'identità $\sin^3 x = (3\sin x - \sin(3x))/4$). Prima di fare il calcolo, rispondere alle seguenti domande: la serie che si otterra' sarà totalmente convergente? La serie delle derivate sarà pure totalmente convergente? a quale funzione?

Trovare poi il minimo della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(a, b, c) = \int_{-\pi}^{\pi} ||\sin x|^3 - (a\cos x + b\sin x + c)|^2\, dx.$$

*Risoluzione.* La serie voluta è la serie di Fourier reale di $f$, in periodo $2\pi$; la funzione $x \mapsto |\sin x|^3$ è di classe $C^2$; infatti la derivata, che è $f'(x) = 3|\sin x|^2 \cos x \operatorname{sgn}(\sin x) = 3\sin^2 x \cos x \operatorname{sgn}(\sin x)$ per $x \notin \mathbb{Z}\pi$, si prolunga per continuità in ogni punto di $\mathbb{Z}\pi$; si ha anche la derivata seconda, che è

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)(6 \sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x) = |\sin x|(6\cos^2 x - 3\sin^2 x),$$

ed è continua in tutto $\mathbb{R}$. Ciò implica che $f'$ ha una serie di Fourier totalmente convergente, e quindi che la serie di Fourier di $f$, a sua volta totalmente convergente, può essere derivata termine a termine: dalle relazioni tra i coefficienti di Fourier di $f$ ed $f'$ discende infatti che la serie di Fourier di $f'$ è la serie derivata della serie di Fourier di $f$ (fatto generale).

OSSERVAZIONE. Anche se inutile ai fini delle domande poste, osserviamo che la derivata terza fuori di $\mathbb{Z}\pi$ esiste ed è

$$f'''(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \cos x(6\cos^2 x - 21 \sin^2 x);$$

$f'''$ ha salti nei punti $\mathbb{Z}\pi$ e quindi non esiste in tali punti; $f''$ è continua e $C^1$ a tratti, ma non $C^1$.

La serie ha solo armoniche pari, ed è di soli coseni; posto $n = 2k$ si ha:

$$\begin{aligned} a_n =& 2\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^3 \cos(nx)\, \frac{dx}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{3\sin x - \sin(3x)}{4} \cos(2kx)\, dx = \\ & \frac{3}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(2kx)\, dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin(3x)\cos(2kx)\, dx = \\ & \frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi} (\sin((2k+1)x) - \sin((2k-1)x))\, dx - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} (\sin((2k+3)x) - \sin((2k-3)x))\, dx = \\ & \frac{3}{4\pi}\left[\frac{\cos((2k-1)x)}{2k-1} - \frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\cos((2k-3)x)}{2k-3} - \frac{\cos((2k+3)x}{2k+3}\right]_0^{\pi} = \\ & \frac{-3}{2\pi}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{6}{2\pi}\frac{1}{(2k)^2-9} - \frac{6}{2\pi}\frac{1}{(2k)^2-1} = \\ & \frac{6}{2\pi}\frac{8}{((2k)^2-1)((2k)^2-9)} = \frac{1}{\pi}\frac{24}{((2k)^2-1)((2k)^2-9)}. \end{aligned}$$

Quanto all'ultima domanda, il minimo richiesto è il quadrato della distanza di $f$ dallo spazio dei polinomi trigonometrici di grado 1; esso si ha con $a, b, c$ uguali ai coefficienti di Fourier di $f$ (in periodo $2\pi$) e quindi con $a = b = 0$, e $c = a_0/2 = 12/(9\pi)$; il suo quadrato vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^6\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{12}{9\pi}\right)^2 dx;$$

si ha ora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|^6\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(3\sin x - \sin(3x))^2}{16}\, dx = \\ \frac{9}{16}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx + \frac{1}{16}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(3x)\, dx - \frac{1}{6}\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin(3x)\, dx = \frac{5}{8}\pi; \end{aligned}$$

ed il minimo voluto è quindi $5\pi/8 - 288/(81\pi)$

□

ESERCIZIO 7. Provare la *disuguaglianza di Wirtinger*: se $u : [a, b] \to \mathbb{C}$ è continua e $C^1$ a tratti, ed $u(a) = u(b) = 0$, allora si ha

$$\int_a^b |u(x)|^2\, dx \le \left(\frac{b-a}{\pi}\right)^2 \int_a^b |u'(x)|^2\, dx.$$

(supporre $a = 0$, come non è restrittivo; prolungare per disparità la funzione in $[-b, b]$, poi per periodicità $2b$ a tutto $\mathbb{R}$; esprimere i coefficienti di $u'$ con quelli di $u$, ed usare l'identità di Parseval). Per quali funzioni vale l'uguaglianza?

*Risoluzione.* Chiamiamo ancora $u$ la funzione così prolungata. Posto $\omega = (2\pi)/(2b) = \pi/b$, si ricorda che si ha $c_n(u') = (in\omega)c_n(u)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (viene dalla formula, integrando per parti). Ne segue:

$$\|u'\|_2^2 = \int_{-b}^{b} |u'(x)|^2\, \frac{dx}{2b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |(in\omega)c_n(u)|^2 = \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |c_n(u)|^2,$$

mentre invece è

$$\|u\|_2^2 = \int_{-b}^{b} |u(x)|^2 \, \frac{dx}{2b} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(u)|^2;$$

si noti ora che essendo $u$ dispari si ha $c_0(u) = 0$, per cui in entrambe le serie il termine con $n = 0$ è nullo. Supposta $u$ non identicamente nulla si ha

$$\frac{\|u'\|_2^2}{\|u\|_2^2} = \omega^2 \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} n^2|c_n(u)|^2}{\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0} |c_n(u)|^2};$$

i termini della serie a numeratore sono maggiori o uguali dei corrispondenti termini della serie a denominatore; l'uguaglianza si ha per $n = \pm 1$, e se $|n| > 1$ si ha solo per $c_n(u) = 0$. Ne segue che la serie a numeratore ha somma sempre maggiore od uguale di quella a denominatore, con uguaglianza se e solo se $c_n(u) = 0$ per $|n| > 1$; quindi

$$\frac{\int_{-b}^{b} |u'(x)|^2 \, dx}{\int_{-b}^{b} |u(x)|^2 \, dx} \geq \omega^2 = \frac{\pi^2}{b^2},$$

con uguaglianza se e solo se $c_n = 0$ per $|n| > 1$. La disuguaglianza è stata provata; si ha uguaglianza se e solo se $u(x) = c_{-1}e^{-i\omega x} + c_1 e^{i\omega x}$; ricordando che $u$ è dispari su $[-b, b]$ si ha $c_{-1} = -c_1 (= c)$; l'uguaglianza si ha solo per funzioni della forma $2ic\sin(\omega x) = k\sin(\pi x/b)$, con $k$ costante arbitraria. □

0.13. **Qualche equazione alle derivate parziali.** Indichiamo qui, a titolo euristico, un metodo risolutivo che si applica a certe equazioni lineari alle derivate parziali.

0.13.1. *Equazione delle onde.* Consideriamo dapprima

(Equazione delle Onde) $$\partial_x^2 u(x,t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 u(x,t) = 0,$$

dove (caso unidimensionale) l'incognita $u(x,t)$ è una funzione di due variabili. Tale equazione regola vari fenomeni ondulatori; e ad esempio è una versione di equazione di piccole oscillazioni traversali per una corda tesa fra due estremi $(0,0)$ ed $(l,0)$: $u(x,t)$ indica l'ordinata all'istante $t$ del punto della corda che ha ascissa (costantemente) $x$, e $c$ è una costante, pari alla tensione divisa per la densità lineare della corda. In questo caso $x$ varia fra $0$ ed $l$ (lunghezza della corda a riposo), e $t$, tempo, varia in $\mathbb{R}$; l'equazione è anche detta *equazione delle corde vibranti*. Risolviamo per questa equazione del secondo ordine il problema di Cauchy: trovare la soluzione (o le soluzioni) avendo assegnata la configurazione iniziale della corda, $u(x,0) = u_0(x)$, e le velocità iniziali, $\partial_t u(x,0) = v_0(x)$.

La risoluzione di questo problema con il metodo di d'Alembert si trova in Analisi Due, 4.26; qui presentiamo un altro metodo, detto di *separazione delle variabili*, dovuto a Fourier, che si applica a varie altre equazioni alle derivate parziali (sempre lineari, però). Chiamiamo *soluzione stazionaria* dell'equazione delle onde ogni soluzione del tipo $U(x)V(t)$, che si esprima cioè come prodotto di funzioni a variabili separate. Imponendo che $U(x)V(t)$ sia soluzione, si ottiene

$$(*) \qquad U''(x)V(t) - \frac{1}{c^2}U(x)V''(t) = 0;$$

naturalmente siamo interessati a soluzioni non identicamente nulle, e quindi supponiamo $U(x)$, $V(t)$ non identicamente nulle; come discusso poi, osservazione alla fine, $*$ è allora verificata se e solo se si ha

$$(**) \qquad \frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{V''(t)}{V(t)} = \lambda, \text{ costante, per ogni } x \in [0,l],\ t \in \mathbb{R}.$$

Si hanno quindi le equazioni, lineari del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$U''(x) = \lambda U(x); \qquad V''(t) = c^2\lambda V(t);$$

si noti che $U$ deve verificare le condizioni al contorno $U(0) = U(l) = 0$; una non difficile discussione mostra che allora , se si vuole $U$ non identicamente nullo, deve essere

$$\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2/l^2, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1; \qquad U(x) = a_n \sin(\sqrt{-\lambda_n}\,x) = k_n \sin(n\pi x/l),\ k_n \in \mathbb{R} \text{ costante.}$$

Infatti, distinguiamo i casi $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$; nel primo caso l'integrale generale di $U'' = \lambda U$ è

$$U(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

ed imponendo le condizioni iniziali si trova il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = & 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda} l} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} l} = & 0, \end{cases}$$

di determinante $e^{-\sqrt{\lambda} l} - e^{\sqrt{\lambda} l} \neq 0$, e quindi con solo la soluzione nulla; se $\lambda = 0$ si ha $U(x) = c_1 + c_2 x$, nulla in $x = 0, l$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$; se $\lambda < 0$ si ottiene, posto $\omega = \sqrt{-\lambda}$, $U(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$; le condizioni iniziali danno il sistema

$$\begin{cases} c_1 = & 0 \\ c_1 \cos(\omega l) + c_2 \sin(\omega l) = & 0, \end{cases}$$

che ha soluzioni non banali solo se $\sin(\omega l) = 0$, verificata per $\omega l = n\pi$, con $n$ intero, $n \geq 1$ (si ricordi che è $\omega > 0$). Posto $\omega_n = cn\pi/l$ l'altra equazione è allora $V''(t) = -\omega_n^2 V(t)$, con soluzioni

$$V(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t), \quad a_n,\ b_n \text{ costanti reali.}$$

Le soluzioni stazionarie sono quindi

$$(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(n\pi x/l), \quad a_n,\ b_n \text{ costanti reali.}$$

(la costante $k_n$ si ingloba entro $a_n, b_n$). L'equazione delle onde è lineare (omogenea), e quindi una somma di soluzioni è ancora soluzione. Per riuscire ad imporre le condizioni iniziali avremo bisogno però di una somma di infinite soluzioni, in generale. La tecnica è la seguente: si prolungano le funzioni su $[0, l]$ a tutto $[-l, l]$ per disparità, poi in periodicità $2l$ a tutto $\mathbb{R}$. Tutte queste funzioni hanno una serie di Fourier di soli seni, della forma $\sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin(n\pi x/l)$; in particolare si ha $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/l)$, $v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(n\pi x/l)$. Cerchiamo una soluzione dell'equazione delle onde della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)) \sin(n\pi x/l);$$

imponendo la prima condizione iniziale:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/l) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/l),$$

ed usando l'unicità dello sviluppo di Fourier si ottiene $a_n = u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponendo di poter derivare termine a termine per ottenere $\partial_t u(x,t)$ si ha poi

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \sin(n\pi x/l) = v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(n\pi x/l),$$

da cui $b_n = v_n/\omega_n = l v_n/(cn\pi)$. Si è formalmente ottenuta la soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( u_n \cos(n\pi ct/l) + \frac{v_n l}{n\pi c} \sin(n\pi ct/l) \right) \sin(n\pi x/l).$$

Occorre un bel po' di lavoro per vedere se questa soluzione formale è una vera soluzione. Ma ci accontentiamo di quanto fatto.

Osservazione. Validiamo qui il metodo di separazione delle variabili usato; è un fatto ovvio, ma è più prudente provarlo.

. *Siano $X, Y$ insiemi, e siano $u_0, u_1 : X \to \mathbb{K}$, $v_0, v_1 : Y \to \mathbb{K}$ funzioni. Si assuma che $u_0, v_0$ non siano identicamente nulle. Si ha allora $u_1 \otimes v_0 = u_0 \otimes v_1$ (cioè , $u_1(x)v_0(y) = u_0(x)v_1(y)$, per ogni $(x,y) \in X \times Y$) se e solo se esiste una costante $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che sia $u_1(x) = \lambda u_0(x)$ per ogni $x \in X$, ed anche $v_1(y) = \lambda v_0(y)$ per ogni $y \in Y$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo $u_1 \otimes v_0 = u_0 \otimes v_1$. Se $\bar{x} \in X$ è tale che sia $u_0(\bar{x}) \neq 0$, si ha $v_1(y) = (u_1(\bar{x})/u_0(\bar{x}))v_0(y)$ per ogni $y \in Y$; posto $\lambda = (u_1(\bar{x})/u_0(\bar{x}))$, se $v_0(\bar{y}) \neq 0$ si ha similmente $u_1(x) = (v_1(\bar{y})/v_0(\bar{y}))u_0(x)$ per ogni $x \in X$, e $v_1(\bar{y})/v_0(\bar{y}) = u_1(\bar{x})/u_0(\bar{x}) = \lambda$ per la relazione precedente. Abbiamo provato la necessità della condizione; se essa poi vale, si ha $u_1(x)v_0(y) = \lambda u_0(x)v_0(y)$ e $u_0(x)v_1(y) = \lambda u_0(x)v_0(y)$ per ogni $(x,y) \in X \times Y$, come voluto. □

0.13.2. *Equazione del calore.* Consideriamo successivamente l'*equazione del calore*, caso unidimensionale:

(Equazione del calore) $$\partial_t u(x,t) - \kappa\partial_x^2 u(x,t) = 0.$$

Se si ha una sbarra, su cui è introdotto un sistema di ascisse $x$, ed $u(x,t)$ è la temperatura del punto $x$ della sbarra all'istante $t$, il calore si propaga solo per conduzione, non ci sono sorgenti, né assorbimenti di calore nella sbarra, ed inoltre la conduttività e la capacità termica della sbarra sono supposte costanti, l'evoluzione della temperatura nel tempo è regolata dall'equazione precedente, con $\kappa$ uguale al rapporto fra conduttività e capacità termica lineare; vedi Analisi Due, 8.18. Consideriamo qui il caso della sbarra limitata, schematizzata dall'intervallo $[0,l]$; supponiamo assegnata la temperatura iniziale $u(x,0) = u_0(x)$; e supponiamo anche assegnate condizioni alle estremità della sbarra; ci limitiamo a considerare i due tipi seguenti:

- La temperatura alle estremità è mantenuta costante ed uguale $u(0,t) = u(l,t) = 0$ per ogni $t$ (si può supporre 0 la temperatura, cambiando scala se occorre).
- $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(l,t) = 0$ per ogni $t$ (non c'è passaggio di calore alle estremità della sbarra).

Cerchiamo le soluzioni stazionarie $U(x)V(t)$; si ottiene

$$U(x)V'(t) - \kappa U''(x)V(t) = 0,$$

che, come prima, sono equivalenti a

$$\kappa U''(x) = \lambda U(x); \qquad V'(t) = \lambda V(t) \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\,\text{costante}.$$

La seconda equazione porge subito $V(t) = V_0 e^{\lambda t}$; la prima si riscrive $U''(x) = (\lambda/\kappa)U(x)$; se le condizioni al contorno sono le prime, temperatura nulla agli estremi, si ha come sopra, che deve essere $\lambda/\kappa = \lambda_n/\kappa = -n^2\pi^2$, con $n \geq 1$ intero, e la soluzione è $U(x) = a_n \sin(n\pi x/l)$, $a_n$ costante reale. Le soluzioni stazionarie sono quindi

$$a_n e^{-\kappa(n\pi/l)^2 t}\sin(n\pi x/l)$$

Cercando di soddisfare all'equazione ed alla condizione iniziale $u(x,0) = u_0(x)$ con una serie di soluzioni stazionarie siamo indotti a prolungare per disparità le funzioni in $[-l,l]$; lo sviluppo in serie di soli seni di $u_0$ sia $u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/l)$; si ottiene come soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\kappa(n\pi/l)^2 t}\sin(n\pi x/l); \quad u_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(\xi)\sin(n\pi\xi/l)\,d\xi$$

Il secondo tipo di condizioni al contorno porta ad avere ancora $\lambda/\kappa = \lambda_n/\kappa = -(n\pi/l)^2$, ma ora le soluzioni sono $U(x) = a_n\cos(n\pi x/l)$, $n \geq 0$ intero, come immediato verificare. Si prolungano ora le funzioni per *parità* in $[-l,l]$ e si ottiene

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{-\kappa(n\pi/l)^2 t}\cos(n\pi x/l); \qquad u_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_0(\xi)\cos(n\pi\xi/l)\,d\xi$$

0.13.3. *Equazione del potenziale.* Risolviamo ora il*problema di Dirichlet*, nel caso particolare di un circolo. Si ha un circolo centrato nell'origine di raggio $R$. Assegnata una funzione $u_0(x,y)$ continua sulla circonferenza $S_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$, si vuole prolungare questa ad una funzione $u : B_R \to \mathbb{R}$ continua ed armonica all'interno di $B_R$, che è il disco chiuso di centro l'origine e raggio $R$. Il problema ha anche una risoluzione con metodi di variabile complessa, come prevedibile; ma qui lo risolviamo con le coordinate polari e la separazione di variabili. La funzione incognita si scrive $w(r,\vartheta) = u(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$, con $0 \leq r \leq R$, e $\vartheta \in \mathbb{R}$; per ogni $r$ fissato è periodica in $\vartheta$, di periodo $2\pi$. Il laplaciano in cordinate polari si scrive

$$\partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r w(r,\vartheta)) + \frac{1}{r^2}\partial_\vartheta^2 w(r,\vartheta) = 0;$$

cerchiamo soluzioni stazionarie della forma $w(r,\vartheta) = \rho(r)\varphi(\vartheta)$, ottenendo

$$\frac{1}{r}(\rho'(r) + r\rho''(r))\varphi(\vartheta) + \frac{\rho(r)}{r^2}\varphi''(\vartheta) = 0.$$

da cui

$$\frac{(1/r)(\rho'(r) + r\rho''(r))}{\rho(r)/r^2} = -\frac{\varphi''(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} = \lambda \text{ costante reale};$$

per l'equazione $\varphi''(\vartheta) = -\lambda\varphi(\vartheta)$ vogliamo soluzioni periodiche di periodo $2\pi$; deve quindi essere $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n \geq 0$ intero, e le soluzioni sono quindi della forma

$$\varphi(\vartheta) = a_n\cos(n\vartheta) + b_n\sin(n\vartheta).$$

Si deve ora risolvere l'equazione ($n \geq 0$ intero):

$$(*) \qquad r^2\rho''(r) + r\rho'(r) - n^2\rho(r) = 0$$

Per $n = 0$ l'equazione è $r\rho''(r) + \rho'(r) = 0$, che è

$$\frac{d}{dr}(r\rho'(r)) = 0 \iff r\rho'(r) = k \iff \rho = k\log r + a_0;$$

ma vogliamo soluzioni che abbiano limite finito per $r \to 0^+$, e quindi $k = 0$; le uniche soluzioni accettabili sono le costanti. Per $n \geq 1$ l'equazione precedente è un'equazione di Eulero, che si risolve con il cambiamento di variabile dipendente $r = e^x$; si pone $\rho(e^x) = v(x)$ e si ha, derivando, $\rho'(e^x)e^x = v'(x)$, da cui $\rho'(e^x) = v'(x)e^{-x}$, e derivando ulteriormente $\rho''(e^x)e^x = v''(x)e^{-x} - v'(x)e^{-x}$, ovvero $\rho''(e^x) = v''(x)e^{-2x} - v'(x)e^{-2x}$; l'equazione $*$ diventa, posto in essa $e^x$ in luogo di $r$:

$$v''(x) - v'(x) + v'(x) - n^2v(x) = 0 \iff v''(x) - n^2v(x) = 0 \iff v(x) = c_ne^{nx} + d_ne^{-nx},$$

ovvero $\rho(r) = c_nr^n + d_nr^{-n}$; per avere limite finito per $r \to 0^+$ deve essere $d_n = 0$. Si trova quindi che le soluzioni stazionarie sono

$$(a_n\cos(n\vartheta) + b_n\sin(n\vartheta))r^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Per $r = R$ si deve avere la funzione $u_0$ assegnata; occorre quindi che i coefficienti di Fourier di tale funzione siano esattamente $a_nR^n$ e $b_nR^n$; cioè

$$a_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cos(n\alpha)\,d\alpha; \qquad b_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\sin(n\alpha)\,d\alpha.$$

Si ottiene quindi lo sviluppo di Fourier della soluzione.

0.13.4. *Altre considerazioni.* Nessuna delle "soluzioni" trovate alla precedente sezione è stata verificata essere tale; il principio di sovrapposizione dice che somme finite di soluzioni sono soluzioni, ma nulla ci assicura che una somma di infinite soluzioni sia ancora soluzione. Per l'ultima si ha

$$\begin{aligned} w(r,\vartheta) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\,d\alpha + \\ & \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)(\cos(n\alpha)\cos(n\vartheta) + \sin(n\alpha)\sin(n\vartheta))\left(\frac{r}{R}\right)^n d\alpha = \\ & \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)}{2}\,d\alpha + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\cos(n(\theta - \alpha))\left(\frac{r}{R}\right)^n d\alpha; \end{aligned}$$

Essendo $(r/R) < 1$ per ogni fissato $r \in [0, R[$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(r/R)^n\cos(n(\vartheta - \alpha))$ è totalmente convergente; si può allora nella formula precedente portare la serie sotto il segno di integrale; si ha cioè

$$w(r,\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos(n(\vartheta - \alpha))\right)d\alpha;$$

si ha poi, per ogni $t \in \mathbb{R}$, posto $q = r/R$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} q^n\cos(nt) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(qe^{it})^n\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2} + \frac{qe^{it}}{1 - qe^{it}}\right) = \\ &\mathrm{Re}\left(\frac{1 + qe^{it}}{2(1 - qe^{it})}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1 + qe^{it} - qe^{-it} - q^2}{1 - 2q\cos t + q^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{1 - q^2}{1 - 2q\cos t + q^2} \end{aligned}$$

Si chiama *nucleo di Poisson* l'espressione

$$P(q,t) = \frac{1 - q^2}{1 - 2q\cos t + q^2};$$

si ha quindi

$$w(r,\vartheta) = \int_0^{2\pi} P(r/R, \vartheta - \alpha)u_0(R\cos\alpha, R\sin\alpha)\,\frac{d\alpha}{2\pi} = P(r/R, \#) * u_0(\vartheta),$$

la convoluzione essendo fatta in periodo $2\pi$. Si dimostra che per $r \to R^-$ il nucleo di Poisson è unità approssimata in $L^1_{2\pi}$, e quindi che effettivamente $w(r,\vartheta)$ tende ad $u_0$ al bordo, ecc. ecc.

0.13.5. *Equazione di Laplace su un rettangolo.* Risolviamo per separazione di variabili l'equazione di Laplace
$$\Delta u(x,y) = \partial_1^2 u(x,y) + \partial_2^2 u(x,y) = 0,$$
dove si chiede ad $u$ di essere continua sul rettangolo $[0,a]\times[0,b]$, e di verificare l'equazione sopra all'interno del rettangolo. È assegnata anche la $u = u_0$ sul bordo; per semplicità supponiamo che $u_0$ sia nulla su tutti i lati, tranne che su $[0,a]\times\{0\}$, dove si ha $u(x,0) = u_0(x)$, continua. Le soluzioni stazionarie sono $U(x)V(y)$:
$$U''(x)V(y) + U(x)V''(y) = 0 \iff \frac{U''(x)}{U(x)} = -\frac{V''(y)}{V(y)} = \lambda \quad \text{costante reale;}$$
$U$ e $V$ verificano le equazioni:
$$U''(x) - \lambda U(x) = 0; \qquad V''(y) + \lambda V(y) = 0.$$
Per $0 < y < b$ deve essere $U(0)V(y) = U(a)V(y) = 0$; se $V$ non è identicamente nulla ciò accade se e solo se $U(0) = U(a) = 0$; e allora, come piu' volte visto, deve essere $\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2/a^2$, e quindi $U(x) = k_n \sin(n\pi x/a)$. L'equazione $V''(y) - (n\pi/a)^2 V(y) = 0$ ha per soluzione generale $V(y) = c_1 \cosh(n\pi y/a) + c_2 \sinh(n\pi y/a)$; deve verificare la condizione al contorno $V(b) = 0$, il che implica che soluzione è $V(y) = c \sinh(n\pi(y-b)/a)$, con $c$ costante. Cerchiamo quindi soluzioni della forma
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sinh(n\pi(y-b)/a)\sin(n\pi x/a)$$
Dovendo essere $u(x,0) = u_0(x)$ si sviluppa $u_0$ in serie di soli seni in $[0,a]$, prolungandolo per disparità in $[-a,a]$; si impone poi, se $u(x,0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x/a)$, che sia $-k_n \sinh(n\pi b/a) = u_n$; si trova quindi come candidata alla soluzione
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\sinh(n\pi b/a)} \sinh(n\pi(b-y)/a)\sin(n\pi x/a)$$
Simili risoluzioni si danno per dati al bordo diversi da 0 su un solo lato; e grazie al principio di sovrapposizione, sommando quattro soluzioni di questo tipo si raggiunge un dato al bordo arbitrario.