Metodi Matematici, 01/09/14

Nome ....

Esercizio 1 [8 punti]

- **1a** Si definisca l'ordine di una funzione in un punto del suo dominio. Si enunci e si provi il teorema sull'esistenza dell'ordine delle funzioni olomorfe.
- **1b** Dalla teoria di Fourier, per $\tau > 0$ si costruisca l'isomorfismo

$$L^2_\tau(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{Z}).$$

Esercizio 2 [6 punti]

Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un funzione intera. Si provi che $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ è intera. Si provi inoltre che se $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{R},\ z > 0$, allora anche $f(z) \in \mathbb{R}$ per ogni $z \in \mathbb{R},\ z < 0$.

Esercizio 3 [9 punti]

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$.

- (i) Si provi che $f \in L^1(\mathbb{R})$;
- (ii) In base alla teoria vista, si determinino gli spazi funzionali che contengono la trasformata di Fourier $\Phi(f)$ e la velocità di decadimento a priori all'infinito della trasformata di Fourier.
- (iii) Usando il teorema dei residui, si calcoli $\Phi(f)\left(\frac{-1}{2\pi}\right)$.

Esercizio 4 [9 punti]

Sia data la funzione $f(x) = \max\{0, \sin x\}$.
(i) Se si considera la serie di Fourier di f, cosa si può dire riguardo alla sua convergenza? Senza calcolarne i coefficienti, qual è l' ordine di infinitesimo, determinabile a priori, dei coefficienti di tale serie trigonometrica?
(ii) Determinare la serie di Fourier di f. (Sugg. Usare la formule di Werner)
(iii) Determinare la serie di Fourier di f'.