

Analisi Matematica 2 parte B, 04/07/17

Parte di esercizi.

Nome

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Esercizio 1 [8 punti]

Si consideri il vincolo in \mathbb{R}^4

$$\begin{cases} z - \frac{1}{x+y^2} = 0, \\ x^2 + y^2 + w = 0. \end{cases}$$

Si provi che il vincolo non presenta punti singolari, se ne determini la dimensione e una base dello spazio tangente in $(1, 0, 1, -1)$.

Determinare i punti critici della funzione $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2$ soggetta al vincolo.

Esercizio 2 [8 punti]

Si consideri la successione di funzioni $f_k : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = \arctan(kx) e^{-|x - \frac{k}{k+1}|}$, $k \in \mathbb{N}$.

Si discuta l'integrabilità delle funzioni f_k e si calcoli il

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_k(x) dx$$

giustificando il procedimento con l'uso di teoremi noti.

Esercizio 3 [8 punti]

Nello spazio \mathbb{R}^3 , si considerino la curva del piano xz data dal grafico della funzione $z = 9 - (1 - x^4)^2$, $x \in [0, 1]$ e la superficie Σ determinata dalla sua rotazione attorno all'asse z . (Sugg.: tracciarne il grafico).

(i) Si parametrizzi Σ .

(ii) Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (-2xz, xy, y^2)$, determinare il flusso del campo vettoriale $G = \text{rot } F$ attraverso Σ orientata da un vettore normale avente terza componente positiva.

(iii) Si calcoli il volume della porzione di spazio racchiusa da Σ e il piano di equazione $z = 9$.