Analisi Matematica 2 parte B, 12/06/18

Parte di esercizi.

Nome ....

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Esercizio 1 [8 punti]

(i) Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = \frac{\sin(n^2x^5)}{n^2x^4}\,\chi_{(0,n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Provare che $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx.$$

(χ_A indica la funzione caratteristica di A. Può essere utile usare la limitatezza di $g(r) = \frac{\sin r}{r}$.)

(ii) Si provi che $f(x,y) = \frac{\sin((x^2+y^2)^4)}{(x^2+y^2)^4}$ èintegrabile su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 2 [8 punti]

(i) Discutere l'esistenza di una funzione di classe C^1, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{2x+y^2}{x^2+xy^2} + 2x\right)\,dx + \frac{xf(y)}{x^2+xy^2}\,dy$$

sia esatta nella regione connessa D del dominio dei coefficienti di ω che contiene il punto $(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

(ii) Determinare l'eventuale potenziale U di ω in D tale che $U(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{4}$.

(iii) Usando il potenziale trovato, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{2x+y^2+2x^3+2x^2y^2}{2xy}, \\ y(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Esercizio 3 [8 punti]

(i) Si consideri l'insieme Σ delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 - z^2 = 1, \\ z > 0, \\ (x-2)^2 + 4y^2 < 1 \end{cases}$$

e si provi che Σ è una superficie parametrica regolare. Si orienti Σ con versore normale avente terza componente positiva. Si scriva una parametrizzazione di $\partial\Sigma+$, si verifichi che $P(2, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}) \in \partial\Sigma$ e si trovi lo spazio tangente a $\partial\Sigma$ nel punto P.

(ii) Dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (x, xy^2, z^3)$, si calcoli la circuitazione di F lungo $\partial\Sigma+$.

(Può essere utile usare un noto teorema.)