Analisi Matematica 2 parte B, 14/06/16

Nome ....

Esercizio 1 [8 punti]

Si provi che il vincolo E definito dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + 2z^2 = 4, \\ x + 4y = 4 \end{cases}$$

è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^3$ e non ha punti singolari. Si dica la sua dimensione come varietà differenziabile.

Determinare i minimi e massimi assoluti della funzione $f(x, y, z) = xy$ su E e lo spazio tangente a E nel punto di massimo.

Esercizio 2 [8 punti]

Determinare le funzioni non identicamente nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che la forma differenziale

$$\omega = f(y)\, dx - 2xy[f(y)]^2\, dy$$

sia esatta e calcolarne i potenziali.

Calcolare l'integrale di ω lungo l'arco di parabola $y = x^2$ tra i punti (l'ordine determina il verso di percorrenza) $(0, 0)$ e $(2, 4)$.

Esercizio 3 [8 punti]

a. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y^2 - z^2 + 4 > 0, \\ x^2 + y^2 - 1 < 0, \\ z > 0. \end{cases}$$

Si descriva Ω a parole con insiemi noti e si calcoli

$$\iiint_\Omega z\, dx\, dy\, dz.$$

b. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y^2 - z^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 < 0, \\ z > 0. \end{cases}$$

orientata dal versore normale avente componente positiva rispetto all'asse z. Sia $F(x, y, z) = \frac{z^2}{2}\, \overline{k}$ un campo vettoriale. Calcolare il flusso

$$\iint_\Sigma F \cdot n\, d\sigma.$$

Mettere in relazione quanto ottenuto con la prima parte dell'esercizio.