Metodi Matematici, 14/07/14

Nome ....

NB: Il secondo compitino contiene solo gli esercizi 1b, 4, 5.

Esercizio 1 [8 punti]

- **1a** Si dia la definizione di funzione meromorfa. Si enunci e si provi il Teorema dell'indicatore logaritmico.
- **1b** Date due funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabili, si definisca la convoluzione $f * g$. Si enunci e si provi il teorema sulla trasformata di Fourier di una convoluzione.

Esercizio 2 [4 punti]

Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione intera. Si provi che se

$$\lim_{z \to 0} z f\left(\frac{1}{z}\right) = 0,$$

allora f è costante.
(Sugg. Si ragioni con $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$).

Esercizio 3 [8 punti]

Dopo aver provato che esiste finito, calcolare il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{x^2 + 4}\, dx.$$

Esercizio 4 [8 punti]

Si consideri la funzione $f \in L^2_4(\mathbb{R})$, pari e periodica di periodo 4 tale che $f(t) = t^2$, per $t \in [0, 2)$.
(i) Discutere la convergenza della serie di Fourier di f e la velocità di decadimento dei suoi coefficienti;
(ii) calcolare la serie di Fourier di f' e di conseguenza si determini quella di f. Quanto vale $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$?
(iii) Sia $u \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^2_4(\mathbb{R})$ tale che

$$u'' - \pi u = f.$$

Determinare la serie di Fourier di u;
(iv) si provi che la serie di Fourier calcolata al punto (iii) definisce una funzione $u \in C^2(\mathbb{R})$.

Esercizio 5 [4 punti]

Detta $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H(t) = 1$, se $t \geq 0$, $H(t) = 0$, se $t < 0$, si consideri la funzione $f(t) = t^2 e^{-t} H(t)$.
(i) Usando la teoria, determinare gli spazi funzionali che contengono la trasformata di Fourier $\Phi(f)$ e la velocità di decadimento all'infinito di $\Phi(f)$.
(ii) Determinare $\Phi(f)$ e verificare quanto previsto.