Metodi Matematici, 17/06/14

Nome ....

NB: Il secondo compitino contiene solo gli esercizi 1b, 4, 5.

Esercizio 1 [8 punti]

- **1a** Siano $D \subset \mathbb{C}$ aperto e $f : D \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Si enunci e si provi il teorema degli zeri per le funzioni olomorfe.
- **1b** Siano $\tau > 0$, $f \in L^1_\tau(\mathbb{R})$, $\omega = 2\pi/\tau$ e $a \in \mathbb{R}$ tale che f abbia in a limiti destro e sinistro. Sotto quali ipotesi su f è possibile affermare che

$$\lim_{m \to +\infty} \int_0^{\tau/2} (f(a+s) - f(a+)) \frac{\sin(m\omega s)}{\sin(\omega s/2)}\, ds = 0\ ?$$

Provare l'affermazione.

Esercizio 2 [6 punti]

Classificare le singolarità della funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+4)^2} + \frac{e^z - 1}{\sin(\pi z/2)} + z \cosh\left(\frac{1}{z}\right).$$

Esercizio 3 [6 punti]

Usando il teorema dei residui, si calcoli l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \cos t}.$$

Esercizio 4 [5 punti]

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo π tale che $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, per $t \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$. Detta

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(\dots) + b_k \sin(\dots))$$

la serie di Fourier in forma reale di f:
(i) discutere la convergenza della serie di Fourier di f e la velocità di decadimento dei suoi coefficienti;
(ii) determinare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k \sin\left(\frac{\pi}{2} k\right).$$

Esercizio 5 [7 punti]

Si consideri la funzione $f(\nu) = \frac{\nu - 1}{(\nu - i)(\nu + 2i)}$.
(i) Usando la teoria, determinare gli spazi funzionali che contengono la sua trasformata di Fourier $\Phi(f)$ e la velocità di decadimento all'infinito di $\Phi(f)$.
(ii) Esiste una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tale che $\hat{u} = f$? Determinarla.
(iii) Quanto vale $\tilde{\Phi}(f)(0)$?