

## Analisi Matematica 2 parte B, 18/09/18

Parte di esercizi.

Nome .....

**Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.**

### Esercizio 1 [8 punti]

Sia  $D = \{(x, y) : y \leq 2x, x \leq y\}$ . (Disegnarlo)

(i) Si provi che  $f(x, y) = \frac{1}{x(1+y^2)} \chi_D(x, y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$  e se ne calcoli l'integrale spiegando bene l'uso dei teoremi noti. ( $\chi_D$  indica la funzione caratteristica dell'insieme  $D$ .)

(ii) Si calcoli

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan 2x - \arctan x}{x} dx \quad ?$$

(Non provare a fare il calcolo diretto.)

### Esercizio 2 [8 punti]

(i) Determinare una funzione di classe  $C^1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che  $f(0) = 1$  e la forma differenziale

$$\omega = ((x+1)f(x+2y) + 2xy \cos(x^2y)) dx + (2xf(x+2y) + x^2 \cos(x^2y)) dy$$

sia chiusa.

(ii) Per tale  $f$ , si provi che  $\omega$  è esatta e poi si determinino i suoi potenziali.

(iii) Calcolare l'integrale della forma differenziale  $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{(x^2+y^2)}$  lungo la circonferenza unitaria del piano centrata in  $(0,0)$  e percorsa in verso antiorario.

### Esercizio 3 [8 punti]

In  $\mathbb{R}^3$ , si consideri la superficie con bordo  $\Sigma$  che verifica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 4, \\ z^2 \geq 1 + x^2 + y^2, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si scriva una parametrizzazione di  $\Sigma$ .

(ii) Si scriva una parametrizzazione del bordo  $\partial\Sigma_+$  e si determini lo spazio tangente alla varietà  $\partial\Sigma_+$  nel punto  $(0, \sqrt{3}, 2)$ .

(iii) Si calcoli la circuitazione del campo vettoriale  $F(x, y, z) = (z^2, x, 1)$  lungo  $\partial\Sigma_+$ .