Analisi Matematica 2 parte B, 19/06/17

Parte di esercizi.

Nome ....

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Esercizio 1 [8 punti]

Si provi che la funzione $f(x, y, z) = x^2 + 2z^2$ ammette minimo e massimo assoluti sul vincolo E definito dall' equazione

$$x^2 + (y^2 - 1)^2 + z^2 = 1.$$

Determinare gli eventuali punti singolari del vincolo, se ne dia la dimensione come varietà e se ne determini lo spazio tangente nel punto $P(1, -1, 0)$. Determinare i minimi e massimi assoluti della funzione f su E.

Esercizio 2 [8 punti]

(i) Determinare la funzione $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(1) = 1$, tale che la forma differenziale

$$\omega = 2x\; g(x^2 + y^2)\; dx + \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}\; dy$$

sia chiusa.
(ii) Prima di determinarne i potenziali, provare che per tale g la forma ω risulta esatta spiegandone il motivo.
(iii) Determinare il potenziale U di ω tale che $U(0, 1) = 2$.
(iv) Usando il potenziale trovato, determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{x}{y}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3 [8 punti]

Si considerino gli insiemi

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 > x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 < 3/2,\ z > 0\},$$

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in R^3 : z^2 > x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3/2,\ z > 0\}.$$

(i) Si giustifichi il fatto che Ω è aperto e Σ è una superficie determinandone una parametrizzazione orientandola con vettore normale avente terza coordinata positiva.

Dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (x, y, \sqrt{\frac{3}{2} - x^2 - y^2})$, determinare:
(i) il flusso di F attraverso Σ;
(ii) la divergenza di F e il suo integrale su Ω;
(iii) il flusso di F attraverso $\partial\Omega \backslash \Sigma$ orientata nel verso positivo dell'asse z.