

Analisi Matematica 2 parte B, 19/09/17

Parte di esercizi.

Nome

Nota: nello svolgimento degli esercizi discutere brevemente i passaggi principali e indicare in particolare l'uso dei teoremi più importanti.

Esercizio 1 [9 punti]

(i) Nel dominio $A = \{(x, y) : -1 < x < 1, 0 < y, y < \frac{1}{|x|} \text{ se } x \neq 0\}$, si discuta l'integrabilità della funzione $f(x, y) = \frac{x(x+1)}{1+x^2y^2}$, per $\alpha > 0$ e si calcoli l'integrale

$$\iint_A f(x, y) dx dy.$$

(ii) Per la successione di funzioni di variabile reale $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \chi_{(0,n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, si discuta l'esistenza ed il valore del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(x) dx.$$

Esercizio 2 [7 punti]

Discutere esistenza, unicità e determinare la funzione $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 tale che $\mu(0) = 1$ e la forma differenziale

$$\omega = y\mu(x) (1 + 2x^2) dx + \mu(x) x dy$$

sia esatta.

Determinare i potenziali di ω per tale scelta di μ .

Usare la teoria delle forme differenziali per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{y(1+2x^2)}{x}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3 [8 punti]

Nello spazio \mathbb{R}^3 , si consideri la superficie Σ data dal sistema

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + 2y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

(i) Si parametrizzi Σ orientandola nel verso positivo dell'asse z . Si parametrizzi il bordo $\partial\Sigma$ (sugg. proiettarli sul piano xy).

(ii) Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (-xz, -yz, z^2)$, determinare il flusso del campo vettoriale F attraverso Σ .

(iii) Dato il campo vettoriale $G = (\frac{-yz^2}{2}, \frac{xz^2}{2}, z)$, si calcoli $\text{rot } G$ e la circuitazione di G lungo $\partial\Sigma_+$.