Analisi Matematica 2 parte B, 22/06/16

Nome ....

Esercizio 1 [8 punti]

Si provi che la funzione $f(x, y, z) = xy + z^2$ ammette minimo e massimo assoluti sul vincolo E definito dall' equazione
$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4.$$
Si provi che il vincolo non ha punti singolari, se ne dia la dimensione come varietà e se ne determini lo spazio tangente nel punto $P(1, -1, 1)$. Determinare i minimi e massimi assoluti della funzione f su E.

Esercizio 2 [8 punti]

Determinare una funzione non identicamente nulla $g = g(y)$, $g'(0) = 0$ tale che la forma differenziale
$$\omega = (g'(y) - y \cos x)\, dx + (-xg(y) - \sin x)\, dy + \arctan \frac{1}{z}\, dz$$
sia esatta e calcolarne tutti i potenziali.

Per la scelta fatta di g, calcolare l'integrale di $\omega - g'(y)\, dx$ lungo il segmento tra i punti (l'ordine determina il verso di percorrenza) $(0, 0, 1)$ e $(1, 1, 1)$.

Esercizio 3 [8 punti]

Si provi che l'insieme $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ determinato dal sistema
$$\begin{cases} y(x^2 + y^2)^4 + z - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 1 < 0. \end{cases}$$
è una superficie.

Orientata Σ con un versore normale avente componente negativa rispetto all'asse z e dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = (-y^2, x, z)$ calcolare il flusso
$$\iint_\Sigma \mathrm{rot} F \cdot n \, d\sigma$$
in due modi: a partire dalla definizione e come conseguenza di un noto teorema.

Esercizio 4

Si consideri la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{\sin x}{1+(x^2+y^2)^2}$, ove $D = \{(x, y) : y > |x|\}$. Si provi che f è integrabile su D e si calcoli
$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$