Analisi Matematica I per IPIM, a.a. 2009/10
prova scritta del 09/02/10

Cognome .... **Nome** ....

Numero di matricola ....
Corso di studi in Ingegneria ....

Nota bene: tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate.
Punteggi indicativi degli esercizi tra parentesi quadre.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6]
Si consideri la funzione (qui sotto $exp(y) = e^y$)

$$f(x) = exp\left(\left[\log\left(\frac{1+x}{1+2x}\right) - \frac{1}{1+3x}\right]\right).$$

Determinare:

- il *dominio naturale* D, i *limiti* ai punti di accumulazione di D, eventuali *asintoti*, simmetrie del grafico e periodicità,
- *continuità*, *derivabilità*, *segno* della derivata, intervalli di monotonia, limiti della derivata, eventuali punti di *minimo e massimo* locale e relativo valore.
  Facoltativi gli attacchi.
- Determinare eventuali punti di minimo e massimo globale di f.
- Nello spazio sottostante, tracciare il *grafico* di f.

Esercizio 2 [6]
Si discuta la convergenza e si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^2} \log(\arctan x)\, dx.$$

Nello spazio sottostante si riportino: una primitiva della funzione e il valore dell'integrale da calcolare.

Esercizio 3 [6]

(i) Si calcoli il raggio di convergenza della seguente serie di potenze.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{2k^2+3k+1}{3k^3+2k+1}\right)^{k^2} x^k$$

(ii) Si determini l'ordine di infinitesimo rispetto ad x per $x \to 0^+$ della funzione

$$f(x) = \sin(\log(1+x)) - x\cos(\sqrt{x})$$

Facoltativo. Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sin(\log(1+\frac{1}{k})) - \frac{1}{k}\cos(\sqrt{\frac{1}{k}}).$$

Nello spazio sottostante si riportino il valore del raggio di convergenza e il monomio a cui f è asintotica per $x \to 0^+$.

Esercizio 4 [6]

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2+(y-2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (1,2) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (1,2). \end{cases}$$

(i) Studiare la continuità di f in $(1,2)$;
(ii) si dica se f è derivabile e si calcolino le derivate parziali e direzionali di f in $(1,2)$;
(iii) si dica se f è differenziabile in $(1,2)$.