

Analisi Matematica I per IPIM-IEN, 24/02/11

CognomeNomeMatricola

Nota bene: tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Punteggi indicativi degli esercizi tra parentesi quadre.

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [7]

Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log(1 + |x|)}.$$

Determinare:

- il *dominio naturale* D , i *limiti* ai punti di accumulazione di D , eventuali *asintoti*, simmetrie del grafico e periodicità,
- *continuità*, *derivabilità*, *segno* della derivata, intervalli di monotonia, limiti della derivata, eventuali punti di *minimo* e *massimo* locale e relativo valore.
- Determinare l'immagine di f e tracciarne il *grafico*.

NB. Per il segno della derivata si provi che $g(x) = \log(1 + |x|) - \frac{|x|}{1+|x|} \geq 0$.

Esercizio 2 [6]

Si dica se converge e si calcoli il seguente integrale improprio

$$\int_{\frac{4}{3}}^{+\infty} \frac{1}{(4x+3)} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Sugg. Si cominci con la sostituzione $x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. ($\sinh(\log 3) = \frac{4}{3}$.)

Esercizio 3 [6]

Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \arctan x) - e^{x^2} + 1}{(1 - \cos x) \sin^2 x + x^5}.$$

Esercizio 4 [5]

Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2 y}{x^2 + 2y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si studino: la continuità e la differenziabilità di f in $(0, 0)$ e si calcolino le derivate parziali e direzionali.