Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 14/02/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: è obbligatorio scrivere le sole risposte richieste *su questo foglio* **senza giustificazione. I passaggi principali dei calcoli e le loro giustificazioni vanno riportati ordinatamente sul foglio di bella.**

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Con il metodo di variazione delle costanti, si trovi l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y"(t) - y(t) = te^t.$$

Indicare nella zona sottostante:

- l'integrale generale dell'omogenea associata.
- una soluzione particolare
- l'integrale generale richiesto

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = xe^y + y - 1\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce in un intorno di $(0,1)$ una funzione $y = g(x)$ tale che $g(0) = 1$.
2. Si stabilisca se g è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Si stabilisca se g è convessa o concava in un intorno di $x = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $x = 0$ g è crescente/decrescente, $g'(0) =$:
- in un intorno di $x = 0$ g è convessa/concava, $g'(0) =$:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione
$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-2y^2}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$
ed il triangolo chiuso T di vertici $(0,0)$, $(4,0)$ e $(0,4)$.

1. Determinare i punti di estremo locale di f interni a T.
2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max locale interni a T sono:
- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \leq \pi + 1\right\}\,,$$
la superficie
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : z = \sin(4x^2 + 9y^2 - 1)\,,\ (x,y) \in D\right\}\,,$$
e il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+1}} \arctan \frac{3y}{\sqrt{4x^2+1}}\ \mathbf{i} + \left[y\ln(z^2+y^2+1) - \cos(zy)\right]\mathbf{j} + e^{xyz^2}\sin(xyz^2)\ \mathbf{k}\,.$$

1. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x^2}{4x^2+9y^2+1}\,dxdy\,.$$
2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: osservare che $\partial\Sigma = \partial D$

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:
- Il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ vale:

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: è obbligatorio scrivere le sole risposte richieste *su questo foglio* **senza giustificazione. I passaggi principali dei calcoli e le loro giustificazioni vanno riportati ordinatamente sul foglio di bella.**

Tema 2 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Con il metodo di variazione delle costanti, si trovi l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y"(t) - 16y(t) = te^{-4t}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- l'integrale generale dell'omogenea associata.
- una soluzione particolare
- l'integrale generale richiesto

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = xe^{y} - y - 1\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(0, -1)$ una funzione $y = g(x)$ tale che $g(0) = -1$.
2. Si stabilisca se g è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Si stabilisca se g è convessa o concava in un intorno di $x = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $x = 0$ g è crescente/decrescente:
- in un intorno di $x = 0$ g è convessa/concava:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione

$$f(x,y) = (x+y)e^{-2x^2-y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

ed il triangolo chiuso T di vertici $(0,0)$, $(4,0)$ e $(0,4)$.

1. Determinare i punti di estremo locale di f interni a T.
2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max locale interni a T sono:
- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq \pi + 2\right\},$$

la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : z = \sin(x^2 + 4y^2 - 2),\ (x,y) \in D\right\},$$

e il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} \arctan \frac{2y}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathbf{i} + \left[y \ln(z^2 + y^2 + 1) - \cos(zy)\right] \mathbf{j} + e^{xyz^2} \sin(xyz^2)\ \mathbf{k}.$$

1. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x^2}{x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy.$$
2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: osservare che $\partial\Sigma = \partial D$

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:
- Il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso Σ vale:

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: è obbligatorio scrivere le sole risposte richieste *su questo foglio* **senza giustificazione. I passaggi principali dei calcoli e le loro giustificazioni vanno riportati ordinatamente sul foglio di bella.**

Tema 3 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Con il metodo di variazione delle costanti, si trovi l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y"(t) - 4y(t) = te^{-2t}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- l'integrale generale dell'omogenea associata.
- una soluzione particolare
- l'integrale generale richiesto

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = ye^{-x} + x - 1\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(1, 0)$ una funzione $x = h(y)$ tale che $h(0) = 1$.
2. Si stabilisca se h è crescente o decrescente in un intorno di $y = 0$.
3. Si stabilisca se h è convessa o concava in un intorno di $y = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $y = 0$ h è crescente/decrescente, $h'(0) =$:
- in un intorno di $y = 0$ h è convessa/concava, $h'(0) =$:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione
$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-3y^2}\,, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$
ed il triangolo chiuso T di vertici $(0,0)$, $(4,0)$ e $(0,4)$.

1. Determinare i punti di estremo locale di f interni a T.
2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max locale interni a T sono:
- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + y^2 \le \pi + 3\right\},$$
la superficie
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : z = \sin(9x^2 + y^2 - 3)\,,\ (x,y) \in D\right\},$$
e il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{9x^2+1}} \arctan \frac{y}{\sqrt{9x^2+1}}\ \mathbf{i} + \left[y\ln(z^2+y^2+1) - \cos(zy)\right]\mathbf{j} + e^{xyz^2}\sin(xyz^2)\ \mathbf{k}\,.$$

1. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x^2}{9x^2+y^2+1}\,dxdy\,.$$
2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: osservare che $\partial\Sigma = \partial D$

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:
- Il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ vale:

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: è obbligatorio scrivere le sole risposte richieste *su questo foglio* **senza giustificazione. I passaggi principali dei calcoli e le loro giustificazioni vanno riportati ordinatamente sul foglio di bella.**

Tema 4 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Con il metodo di variazione delle costanti, si trovi l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y"(t) - 9y(t) = te^{3t}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- l'integrale generale dell'omogenea associata.
- una soluzione particolare
- l'integrale generale richiesto

Esercizio 2 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = ye^{-x} - x - 1\,, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

1. Si provi che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce in un intorno di $(-1, 0)$ una funzione $x = h(y)$ tale che $h(0) = -1$.
2. Si stabilisca se h è crescente o decrescente in un intorno di $x = 0$.
3. Si stabilisca se h è convessa o concava in un intorno di $x = 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- in un intorno di $y = 0$ h è crescente/decrescente, $h'(0) =$:
- in un intorno di $y = 0$ h è convessa/concava, $h'(0) =$:

Esercizio 3 [6 punti]

Siano dati la funzione
$$f(x,y) = (x+y)e^{-3x^2-y^2}\,, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2\,,$$
ed il triangolo chiuso T di vertici $(0,0)$, $(4,0)$ e $(0,4)$.

1. Determinare i punti di estremo locale di f interni a T.
2. Determinare i punti di estremo assoluto di f appartenenti a T.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max locale interni a T sono:
- i punti di min/max assoluto in T sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si considerino l'insieme
$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4x^2+25y^2 \le \pi+1\right\},$$
la superficie
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) : z = \sin(4x^2+25y^2-1)\,,\ (x,y)\in D\right\},$$
e il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x^2}{\sqrt{4x^2+1}}\arctan\frac{5y}{\sqrt{4x^2+1}}\ \mathbf{i} + \left[y\ln(z^2+y^2+1) - \cos(zy)\right]\mathbf{j} + e^{xyz^2}\sin(xyz^2)\ \mathbf{k}\,.$$

1. Si calcoli
$$\iint_D \frac{x^2}{4x^2+25y^2+1}\,dxdy\,.$$
2. Si calcoli il flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale abbia terza componente non negativa.

   Sugg.: osservare che $\partial\Sigma = \partial D$

Indicare nella zona sottostante:

- L'integrale del punto 1. vale:
- Il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso Σ vale:

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate.
Punteggi indicativi degli esercizi tra parentesi quadre.

Tema 1

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

- Si dia la definizione di lunghezza e di ascissa curvilinea per una curva parametrica.
- Quanto vale la velocità scalare di una curva parametrizzata con l'ascissa curvilinea?
- Si provi tale affermazione.

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate.
Punteggi indicativi degli esercizi tra parentesi quadre.

Tema 2

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

- Si dia la definizione di funzione scalare differenziabile in un punto e di derivata direzionale.
- Si enunci la formula del gradiente per il calcolo delle derivate direzionali delle funzioni in più variabili.
- Si provi il precedente risultato.

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate.
Punteggi indicativi degli esercizi tra parentesi quadre.

Tema 3

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

- Si dia la definizione di campo vettoriale e di campo conservativo.
- Si enunci il teorema che riguarda il calcolo del lavoro per un campo conservativo.
- Si provi tale teorema.

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate.
Punteggi indicativi degli esercizi tra parentesi quadre.

Tema 4

Domande di Teoria [8 punti] a cui rispondere su questo foglio

- Si definisca (in formule, con opportune coordinate) un solido di rotazione rispetto ad un asse.
- Si enunci il primo teorema di Guldino per il calcolo del volume di un solido di rotazione.
- Si provi il risultato precedente.