Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 15/07/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: è obbligatorio scrivere le sole risposte richieste *su questo foglio* **senza giustificazione. I passaggi principali dei calcoli e le loro giustificazioni vanno riportati ordinatamente sul foglio di bella.**

Tema 1 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Siano dati la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e l'insieme

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \ln(y^2+1) = 1\right\}.$$

1. Provare che f ha massimo e minimo in Γ.
2. Calcolarne i valori utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Indicare nella zona sottostante:

- i punti critici vincolati:
- i valori di minimo e massimo:

Esercizio 2 [6 punti]

Sia dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -\frac{2x}{z-x^2-y^2}\,\mathbf{i} - \frac{2y}{z-x^2-y^2}\,\mathbf{j} + \frac{1}{z-x^2-y^2}\,\mathbf{k}, \qquad z > x^2+y^2.$$

1. Si provi che è conservativo e se ne calcoli il potenziale U tale che $U(0,0,1) = 0$.
2. Si calcoli
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$
dove γ è la curva parametrizzata da
$$\mathbf{r}(t) = t^2 e^{\sin t}\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \left(t^4 e^{2\sin t} + \cos^2 t + 1\right)\mathbf{k}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$
3. Si calcoli il flusso del rotore del campo vettoriale
$$\mathbf{G}(x,y,z) = \mathbf{F}(x,y,z) + z\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{k}$$
attraverso la superficie
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-4)^2 = 1,\ y > 0\right\},$$
orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ soddisfi $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} > 0$.

Indicare nella zona sottostante:

- il potenziale U richiesto:
- il valore dell'integrale al punto 2:
- il flusso del rotore di $\mathbf{G}$ attraverso Σ:

Esercizio 3 [6 punti]

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 1 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

se ne studino le proprietà di continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$.
Indicare nella zona sottostante:

- se f è continua in $(0,0)$:
- se f è derivabile in $(0,0)$ e gli eventuali valori delle sue derivate parziali in $(0,0)$:
- se f è differenziabile in $(0,0)$:

Esercizio 4 [6 punti]

Utilizzando un opportuno cambio di variabili calcolare

$$\iint_D \frac{x+2y}{x-y+5}\, dxdy$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-y \leq x+2y \leq (x-y)^2\,,\ 1 \leq x-y \leq 2\right\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il cambio di variabili effettuato:
- il valore dell'integrale da calcolare: