

Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 16/09/13

Cognome e Nome ..... Matr. ....

**Nota bene:** è obbligatorio scrivere le sole risposte richieste *su questo foglio* senza giustificazione. I passaggi principali dei calcoli e le loro giustificazioni vanno riportati ordinatamente sul foglio di bella.

**Tema 1 (parte di esercizi)**

**Esercizio 1** [6 punti]

Sia data l'equazione

$$x^2 + \ln(1 + xy) + ye^{2y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (*)$$

1. Provare che (\*) definisce implicitamente in un intorno di  $(0, 0)$  una sola funzione  $y = f(x)$ .
2. Verificare che  $x = 0$  è un punto critico per  $f$  e stabilirne la natura.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore di  $\partial_y f(0, 0)$ :
- la natura di  $x = 0$  come punto critico di  $f$ :

**Esercizio 2** [6 punti]

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = te^t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Indicare nella zona sottostante:

- l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:
- l'integrale generale dell'equazione data:
- la soluzione del problema di Cauchy:

**Esercizio 3** [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x, y) = y^3 + 4x^2y - 4y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provare che  $f$  ha massimo e minimo assoluti nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e determinarli.

Indicare nella zona sottostante:

- tutti i punti critici di  $f$  in  $D$ :
- i punti di massimo e minimo assoluti di  $f$  in  $D$ :
- i valori di massimo e minimo assoluti di  $f$  in  $D$ :

**Esercizio 4** [6 punti]

Calcolare il seguente integrale triplo

$$\iiint_D x^2(2-z) \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale da calcolare: