Fondamenti di Analisi Matematica II per IPIM-IEN, 31/01/13

Cognome e Nome .... **Matr.** ....

Nota bene: è obbligatorio scrivere le sole risposte richieste *su questo foglio* **senza giustificazione. I passaggi principali dei calcoli e le loro giustificazioni vanno riportati ordinatamente sul foglio di bella.**

Tema 2 (parte di esercizi)

Esercizio 1 [6 punti]

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(2xy)-1}{x^2+3y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
2. Stabilire se esistono le derivate parziali e direzionali di f in $(0,0)$ e calcolarle.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.
4. In $(0,0)$ vale la formula del gradiente?

Indicare nella zona sottostante:

- f è continua in $(0,0)$?
- scrivere gradiente e derivata direzionale nella direzione $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$:
- f è differenziabile in $(0,0)$?
- vale la formula del gradiente?

Esercizio 2 [6 punti]

Siano dati il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2z^3 - xy)\,\mathbf{i} + (y^3z^3 + y^3)\,\mathbf{j} - (y^2z^4 - yz)\,\mathbf{k}\,,$$

l'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (z-3)^2\,,\ 0 \leq z \leq 2\right\},$$

e la superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z-3)^2\,,\ 0 < z < 2\right\}.$$

1. Calcolare
$$\iiint_D y^2\, dxdydz\,.$$
Sugg.: integrare per strati o osservare la simmetria di D.
2. Calcolare il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D.

3. Calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ orientata in modo che il versore normale $\mathbf{n}$ abbia terza componente positiva.

Indicare nella zona sottostante:

- il valore dell'integrale al punto 1. è:
- il flusso esterno di $\mathbf{F}$ attraverso ∂D è:
- il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è:

Esercizio 3 [6 punti]

Sia data la funzione $f(x, y) = 2x^2 + 8y^2 - 2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Usando il principio dei moltiplicatori di Lagrange, determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f soggetta al vincolo $x^2 + 8y^2 - 8 = 0$.
2. Determinare i punti di minimo e massimo assoluti di f nell'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 8y^2 \leq 8\right\}.$$

Indicare nella zona sottostante:

- i punti di min/max assoluto relativi al punto 1. sono:
- i punti di min/max assoluto relativi al punto 2. sono:

Esercizio 4 [6 punti]

Si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \big(x \sin(x + 2y), 2 \cos(x + 2y) + 2x \sin(x + 2y) + y\big).$$

1. Si dica se $\mathbf{F}$ è irrotazionale;
2. si dica se $\mathbf{F}$ è conservativo e eventualmente se ne calcoli il potenziale che vale -1 in $(x, y) = (\pi, 0)$;
3. si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo l'arco di parabola γ di equazione $y = x^2 - 3x$, $x \in [1, 3]$, orientato nel verso delle x crescenti.

Indicare nella zona sottostante:

- $\mathbf{F}$ è irrotazionale?
- $\mathbf{F}$ è conservativo?
- Il potenziale richiesto di $\mathbf{F}$ vale:
- $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} =$