Introduzione alle Equazioni Differenziali, 19/01/15

Nome ....

Esercizio 1

Si scriva il problema al contorno di Neumann omogeneo per l'equazione delle onde, si definisca l'energia al tempo $t > 0$ della soluzione e si provi che l'energia è costante nel tempo.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2 tale che

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & \text{se } x \in [0,1), \\ 0, & \text{se } x \in [-1,0). \end{cases}$$

(i) Discutere la convergenza della serie di Fourier di f e la velocità di decadimento dei suoi coefficienti;
(ii) calcolare la serie di Fourier di f e di conseguenza si determini quella di f' giustificando la risposta;
(iii) si scriva f' e si determini la somma della sua serie di Fourier in $x = 0$ e di conseguenza la somma della serie $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Esercizio 3

(i) Determinare una soluzione stazionaria $u_S(x)$ dell'equazione del calore con condizioni al contorno:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 3u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,5) \times (0,+\infty); \\ u(0,t) = 1, & u_x(5,t) = -2, \quad \text{per ogni } t > 0. \end{cases}$$

(ii) Determinare ora una soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 3u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,5) \times (0,+\infty); \\ u(0,t) = 1, & u_x(5,t) = -2, \quad \text{per ogni } t > 0; \\ u(x,0) = u_S(x) + 2\sin\left(\frac{\pi}{10}x\right) - 3\sin\left(\frac{7}{10}\pi x\right), & x \in (0,2). \end{cases}$$