Introduzione alle Equazioni Differenziali, 19/02/15

Nome ....

Esercizio 1

Data una funzione $2\pi-$periodica si definisca la sua serie di Fourier in forma complessa e reale. Si dica cosa sono due funzioni ortogonali in $L^2(-\pi,\pi)$ e si provi che due funzioni ortogonali sono linearmente indipendenti. Si enunci e si provi il teorema sulla convergenza totale delle serie di Fourier (fornire una dimostrazione completa).

Esercizio 2

Sia data la funzione dispari e periodica di periodo 2π tale che $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x$ per $x \in (0,\pi)$.
(i) Se si considera la serie di Fourier della derivata f', cosa si può dire riguardo alla sua convergenza? Senza calcolarne i coefficienti, qual è l' ordine di infinitesimo, determinabile a priori, dei coefficienti di tale serie trigonometrica?
(ii) Usando il passo precedente e spiegando i passaggi, determinare la serie di Fourier di f.
(iii) Dedurre la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^6}.$$

Esercizio 3

Con il metodo della separazione delle variabili, determinare una soluzione del problema al contorno per l'equazione di Laplace (con condizioni di tipo Neumann e Dirichlet)

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, & (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\pi); \\ u_x(0,y) = 0 = u_x(\pi,y), \quad \text{per } y \in (0,\pi); & \\ u(x,0) = 0,\ x \in (0,\pi); & \\ u(x,\pi) = 3 - 4\cos(3x),\ x \in (0,\pi). & \end{cases}$$