

## Introduzione alle Equazioni Differenziali, 19/01/15

Nome .....

### Esercizio 1

Si scriva il problema al contorno di Dirichlet omogeneo per l'equazione del calore, si definisca l'energia al tempo  $t > 0$  della soluzione e si provi l'unicità per il problema.

### Esercizio 2

Si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pari e periodica di periodo 6 tale che

$$f(x) = (1 - x), \quad \text{se } x \in [0, 3].$$

- (i) Discutere la convergenza della serie di Fourier di  $f$  in particolare si dica se la serie converge uniformemente;
- (ii) calcolare la serie di Fourier di  $f$ ;
- (iii) determinare la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{3}x\right);$$

- (iv) si scriva  $f'$ : è possibile dedurre la serie di Fourier di  $f'$  da quella di  $f$ ? Giustificare la risposta e eventualmente la si calcoli.

### Esercizio 3

Risolvere il problema iniziale e al contorno:

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - 4u_{xx}(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, 3) \times (0, +\infty); \\ u(0, t) = 0, & u_x(3, t) = 0, \quad \text{per ogni } t > 0; \\ u(x, 0) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \sin\left(\frac{7}{6}\pi x\right), & x \in (0, 3); \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in (0, 3) \end{cases}$$