Complementi per il corso di Analisi Matematica 1

Ingegneria dei Processi Industriali e dei Materiali

Prof. Pierpaolo Soravia

October 6, 2011

Le notazioni della presente dispensa sono quelle del testo di riferimento del corso.

1 Limiti di funzioni

1.1 Sul principio di sostituzione nei limiti

Si è visto che se f, g sono funzioni, $x_o \in \mathbb{R}^*$ è punto di accumulazione per $dom(f) \cap dom(g)$ e vale

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

scriviamo allora che $f(x) = o(g(x))$, per $x \to x_o$. Se invece risulta che

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

scriviamo che $f(x) \sim g(x)$, per $x \to x_o$. Nel calcolo dei limiti, per risolvere forme indeterminate è spesso utile usare il seguente risultato, che vale sia nel caso di infiniti che di infinitesimi.

Teorema 1.1.1 *(Principio di sostituzione per i limiti) Siano f_1, f_2, g_1, g_2 funzioni tali che $f_1 \sim f_2$, $g_1 \sim g_2$ per $x \to x_o$. Qualora esistano i seguenti limiti, valgono le uguaglianze*

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to x_o} \frac{f_2(x) + o(f_2(x))}{g_2(x) + o(g_2(x))} = \lim_{x \to x_o} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Dimostrazione. Basta osservare che da $f_1 \sim f_2$ per $x \to x_o$ segue che

$$f_1(x) = f_2(x) + o(f_2(x)) = f_2(x)\left(1 + \frac{o(f_2(x))}{f_2(x)}\right)$$

e che si ha

$$\lim_{x \to x_o} \left(1 + \frac{o(f_2(x))}{f_2(x)}\right) = 1.$$

□

Ad esempio si possono calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2}{\log(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + e^x}{3^{x+\frac{1}{x}} + 2^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3^{x+\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{3^x} = 0.$$

Si giustifichino i conti precedenti.

2 Serie numeriche

2.1 Sui criteri di convergenza per le serie a termini positivi

Dal criterio del confronto per le serie a termini positivi (cfr. testo a pag. 117), seguono facilmente dei criteri di confronto asintotico.

Teorema 2.1.1 *(Confronto asintotico per le serie) Siano $\{a_k\}, \{b_k\}$ due successioni a termini positivi.*

(i) Se $a_k \sim b_k$, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge (o diverge) se e solo se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge (o diverge).

(ii) Se $a_k = o(b_k)$, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ convergente implica $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ convergente e $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ divergente implica $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ divergente

Dimostrazione. Per (i) basta osservare che dalla definizione di limite, da

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$$

si ha che

$$\frac{1}{2} b_k \le a_k \le \frac{3}{2} b_k, \quad \text{definitivamente}.$$

Per (ii) si osservi che sempre per la definizione di limite, da

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$$

segue che

$$a_k \leq b_k, \quad \text{definitivamente.}$$

Si conclude in entrambi i casi utilizzando il criterio del confronto. $\square$

Usando limiti notevoli noti, il confronto asintotico per le serie consente di provare che la seguente serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \log{(1+\frac{1}{k})}, \quad \text{è divergente,}$$

mentre la seguente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{e^k}, \quad \text{è convergente.}$$

Si giustifichi per esercizio quanto appena affermato.

2.2 Sulla convergenza assoluta di una serie

Proviamo in modo diverso dal testo il seguente

Teorema 2.2.1 *Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ è una serie assolutamente convergente allora è convergente e si ha*

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|.$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione

$$b_k = a_k + |a_k|$$

e osserviamo che valgono le seguenti disuguaglianze

$$0 \leq b_k \leq 2|a_k|.$$

Dal criterio del confronto segue allora che se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ è convergente, anche la serie a termini positivi $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ lo è. Perciò per il teorema sulla convergenza della somma di serie lo è anche quella che ha per termine generale

$$a_k = b_k - |a_k|.$$

A questo punto per il scriterio del confronto, da

$$a_k \leq |a_k|, \quad -a_k \leq |a_k|$$

segue che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|, \quad -\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|,$$

da cui la stima voluta. □

3 Integrabilità delle funzioni Lipschitziane

Teorema 3.0.2 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana, $a < b$. Allora essa è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Consideriamo una costante $L > 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$

Sappiamo che f è continua e quindi limitata per il Teorema di Weierstrass. Sia ora dato $\varepsilon > 0$. Consideriamo una suddivisione D_ε costituita dai punti $a = x_o < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e che abbia finezza $|D_\varepsilon| < \frac{\varepsilon}{L(b-a)}$. Per il Teorema di Weierstrass possiamo trovare $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, in modo tale che

$$f(y_i) = m_i, \quad f(z_i) = M_i.$$

Calcoliamo allora

$$\begin{gathered} 0 \leq S(D_\varepsilon, f) - s(D_\varepsilon, f) = \textstyle\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ = \textstyle\sum_{i=1}^n (f(z_i) - f(y_i))(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n L|z_i - y_i|(x_i - x_{i-1}) \\ \leq L\frac{\varepsilon}{L(b-a)} \textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon. \end{gathered}$$

Perciò f è integrabile secondo Riemann. □

testo consigliato per consultazione, vol.2 parte 2.