Complementi di Fondamenti di Analisi II, Prof. P. Soravia

Consideriamo in questo corso funzioni in più variabili a valori scalari o vettoriali. Consirediamo in particolare lo spazio vettoriale

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\},$$

in cui ricordiamo risulta definita la norma

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Studieremo funzioni del tipo $\mathbf{f}$: $D \to \mathbb{R}^m$, ove $D \subset \mathbb{R}^n$. Quindi la funzione $\mathbf{f}$ associa ad ogni vettore $\mathbf{x}\in D$ un ben determinato vettore $\mathbf{f(x)}\in \mathbb{R}^m$. La funzione si dice scalare se $m = 1$. Scriveremo il vettore immagine in componenti come segue

$$\mathbf{f(x)} = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})).$$

Questa notazione individua m funzioni scalari $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ che si chiamano le componenti scalari della funzione vettoriale $\mathbf{f}$ e si indica $\mathbf{f}= (f_1, \ldots, f_m)$. Osserviamo che per una tale funzione il grafico

$$\{(\mathbf{x}, \mathbf{f(x)}) : \mathbf{x} \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

quindi, tranne pochi casi, esso non si può visualizzare con un disegno.

Il significato geometrico/fisico delle funzioni in più variabili è molto variegato e dipende ad esempio dalla scelta delle dimensioni n, m. I casi che più ci interesseranno e per cui svilupperemo metodi di calcolo sono:

- *le funzioni scalari*, n variabile, $m = 1$
- *le curve (parametriche)*, $n = 1$, m variabile;
- *le superficie parametriche*, $n = 2$, $m = 3$;
- *i campi vettoriali*, $n = 3$, $m = 3$ (o talvolta $n = 2$, $m = 2$).

1. Elementi di topologia.

Nel caso della retta, si è visto il ruolo degli intervalli centrati come intorni dei punti. Estendiamo questo concetto allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Dato un punto $\mathbf{v}_o \in \mathbb{R}^n$ definiamo l' intorno circolare (o palla) di centro $\mathbf{v}_o$ e raggio $r > 0$ come

$$I(\mathbf{v}_o, r) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{v} - \mathbf{v}_o| < r\}.$$

Ad esempio per $n = 2$ e posto $\mathbf{v}_o = (x_o, y_o)$, l' intorno circolare è definito dall' equazione

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 < r^2,$$

che è risolta dai punti $\mathbf{v}= (x, y)$ di un cerchio di centro (x_o, y_o) e raggio r. Se invece $n = 3$, posto $\mathbf{v}_o = (x_o, y_o, z_o)$, l' intorno circolare è definito dall' equazione

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 < r^2,$$

che è risolta dai punti (x, y, z) di una sfera di centro (x_o, y_o, z_o) e raggio r.

Sia ora $E \subset \mathbb{R}^n$, dato un punto $\mathbf{x}_o \in \mathbb{R}^n$ si presenta uno solo dei seguenti tre casi:

- diremo che $\mathbf{x}_o$ è *interno* ad E, oppure $\mathbf{x}_o \in E^o$, se (informalmente) il punto $\mathbf{x}_o$ è circondato da E, cioè esiste $r > 0$ tale che $I(\mathbf{x}_o, r) \subset E$.

- diremo che $\mathbf{x}_o$ è *esterno* ad E, o $\mathbf{x}_o \in (\mathbb{R}^n \backslash E)^o$, se vicino ad $\mathbf{x}_o$ non vi sono punti di E, cioè esiste $r > 0$ tale che $I(\mathbf{x}_o, r) \cap E = \emptyset$.

- diremo che $\mathbf{x}_o$ è di *frontiera* per E, o $\mathbf{x}_o \in \partial E$, se in ogni intorno di $\mathbf{x}_o$ cadono sia punti di E che punti che non fanno parte di E.

Esercizio: valutare le definizioni precedenti nel caso dell' insieme $I(\mathbf{x}_o, r)$, di $\mathbb{R}^n$ e dell' insieme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Diamo qualche proprietà ulteriore per gli insiemi.

Definizione. *Diciamo che un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è aperto se tutti i suoi punti sono interni, cioè $E = E^o$.*

Si possono verificare alcune proprietà per gli insiemi aperti, vale a dire:

- un insieme è aperto se e solo se non contiene nessun punto di frontiera, cioè se $E \cap \partial E = \emptyset$;

- l' unione di insiemi aperti è un insieme aperto;

- l' intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un insieme aperto.

La dimostrazione di queste affermazioni può essere fatta per esercizio. Parallelamente si possono definire gli insiemi chiusi.

Definizione. *Diciamo che un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ è chiuso se $\mathbb{R}^n \backslash E$ è aperto.*

Per gli insiemi chiusi valgono le proprietà seguenti:

- un insieme D è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di frontiera, cioè se $\partial D \subset D$;

- l' intersezione di insiemi chiusi è un insieme chiuso;

- l' unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso.

Esercizio: dare un esempio di un sottoinsieme del piano che non sia nè aperto nè chiuso.

Utilizzeremo anche le definizioni seguenti.

Definizione. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$, diciamo chiusura di E l' insieme*

$$\overline{E} = E \cup \partial E.$$

Definizione. *Un insieme $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice limitato se esiste $r > 0$ tale che $E \subset I(\mathbf{0}, r)$.*

Definizione. *Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice compatto se è chiuso e limitato.*

Tra le funzioni a valori vettoriali che consideriamo vi sono le curve. Dato un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, diciamo curva una funzione continua del tipo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. L' equazione vettoriale $\mathbf{x}=\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \ldots, \gamma_n(t))$ si dice equazione parametrica della curva. Nel seguito, quando parleremo di proprietà di regolarità per la funzione γ (continuità, derivabilità, $\ldots$), ci riferiremo alle analoghe proprietà per le sue componenti scalari $\gamma_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Le curve ci consentono di definire un' ulteriore proprietà degli insiemi.

Definizione. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Diciamo che A è connesso (per archi) se scelti comunque due punti $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$ si può trovare una curva continua in A, $\gamma : [a, b] \to A$ continua, tale che $\gamma(a) = \mathbf{x}_1, \gamma(b) = \mathbf{x}_2$.*

La proprietà: l' aperto A è connesso , si può descrivere informalmente dal punto di vista geometrico dicendo che A è costituito da *un unico pezzo*.

2. Limiti e continuità per funzioni in più variabili.

Nel seguito, per definire i limiti di una funzione $f : D \to \mathbb{R}^n$, supporremo che il suo dominio D verifichi la proprietà seguente: esiste un insieme aperto $E \subset \mathbb{R}^n$ tale che $E \subset D \subset \overline{E}$. Diamo ora la definizione di limite.

Definizione. *Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ con la proprietà precedente e sia $\mathbf{x}_o \in \overline{D}(= \overline{E})$. Consideriamo una funzione $f : D \to \mathbb{R}^m$. Diciamo che*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$$

se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $\mathbf{x} \in D \backslash \{\mathbf{x}_o\}$ che verifichi $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| < \delta$, si abbia $|f(\mathbf{x}) - \mathbf{l}| < \varepsilon$.

Tale definizione si può chiaramente reinterpretare in termini geometrici usando gli intorni circolari. Si ha infatti che $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o} f(x) = \mathbf{l}$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che non appena $\mathbf{x} \in I(\mathbf{x}_o, \delta) \cap (D \backslash \{x_o\})$ allora $f(\mathbf{x}) \in I(\mathbf{l}, \varepsilon)$, a cui corrisponde un ovvio significato geometrico. Si consiglia per esercizio di farsi dei disegni nei vari casi che all' inizio abbiamo indicato come interessanti per il corso.

Definizione. *Una funzione $f : D \to \mathbb{R}^m$ è continua in $\mathbf{x}_o \in D$ se risulta*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_o} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_o).$$

Diremo che la funzione f è continua (in E) se essa è continua in ogni punto $\mathbf{x}_o \in E$.

In conseguenza alla definizione di limite, possiamo anche dare una definizione equivalente di funzione continua in un punto.

Definizione. *Siano $D \subset \mathbb{R}^n$ insieme e $f : D \to \mathbb{R}^m$ una funzione. Diciamo che f è continua in $\mathbf{x}_o \in D$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_o)| < \varepsilon$ non appena $\mathbf{x} \in D$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o| < \delta$.*

Come nel caso delle funzioni di una variabile, anche per le funzioni scalari valgono le note relazioni tra le operazioni dello spazio vettoriale e la continuità, nonchè la continuità delle funzioni composte. Non li enunciamo esplicitamente. Valgono anche i principali teoremi, quale ad esempio il Teorema della permanenza del segno (che è utile enunciare e provare per esercizio).

Con le funzioni continue si possono definire in modo equivalente insiemi aperti e chiusi come segue (Questa affermazione è una semplice conseguenza del Teorema della permanenza del segno che si può provare per eserrcizio): data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua allora l' insieme

$$\{(x, y) : f(x, y) > 0\}$$

è un aperto mentre l' insieme

$$\{(x, y) : f(x, y) \geq 0\}$$

è un chiuso. Ad esempio è aperto l' insieme di definizione (dominio) della funzione $f(x,y) = \frac{1}{\log(x+y)}$ (perchè?).

Esercizio. Dire se l' insieme di definizione di $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ soddisfa la proprietà degli insiemi aperti oppure degli insiemi chiusi e lo si disegni nel piano.

Si prova inoltre facilmente che data una funzione vettoriale $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ essa risulta continua (in un punto $\mathbf{x}_o$) se e solo se tutte le sue componenti $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ sono continue (in $\mathbf{x}_o$). Questa proprietà si estende anche al caso dei limiti, vale a dire $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_o} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ se e solo se $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_o} f_i(\mathbf{x}) = l_i \in \mathbb{R}$, per ogni $i = 1, \ldots, m$. Quindi la verifica della continuità o il calcolo di un limite si riconduce al caso delle funzioni scalari che è il caso che considereremo più in dettaglio.

Osservazione. Se una funzione di due variabili $f(x,y)$ è continua in un punto (x_o, y_o), allora tenendo fissa la variabile $y = y_o$ e facendo variare la sola x si ottiene una funzione continua in x_o. Infatti se si ha

$$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y) = f(x_o, y_o),$$

a maggior ragione sarà

$$\lim_{x\to x_o} f(x, y_o) = f(x_o, y_o).$$

Analogamente sarà continua la funzione della sola variabile y, $y \mapsto f(x_o, y)$ nel punto y_o. Il viceversa non è invece vero come discutiamo nel seguente esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Essa è chiaramente continua nell' origine separatamente nelle due variabili, ma non è una funzione continua. Per capire questo fatto, ragioniamo nel modo seguente.

Cominciamo con una considerazione generale. Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ una curva continua, con o interno all' intervallo I, tale che $\gamma(0) = (x_o, y_o)$. Quando parliamo di *restrizione della funzione* f *alla curva* γ intendiamo considerare la funzione composta $g(t) = f(\gamma(t))$. L' idea geometrica è la seguente: invece di far variare (x,y) nell' intero dominio di f, ci restringiamo ai punti del *sostegno* della curva $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ che è dato dall' insieme

$$\{\gamma(t) : t \in I\}.$$

È chiaro che se f è una funzione continua in (x_o, y_o) allora g sarà continua in $t = 0$.

Nel caso dell' esempio precedente, se ci restringiamo ai punti della bisettrice del primo e terzo quadrante, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \end{cases} \quad t > 0,$$

otteniamo come funzione composta $f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$ che non tende a zero per $t \to 0$. Quindi f non è continua in $(0,0)$. Inoltre $f(t,-t) = -\frac{1}{2}$ e perciò il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ non esiste.

Questo è il metodo che si segue generalmente per provare che una funzione non ammette limite: si cercano due curve continue (di solito si inizia considerando le rette) lungo le quali la funzione ammetta limiti diversi (oppure non ammetta limite se ristretta ad una di esse).

Vediamo ora come, usando le coordinate polari, si possa provare viceversa che una funzione in due variabili ammette limite. Proviamo ad esempio che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

Riscriviamo la funzione utilizzando le coordinate polari $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Perciò

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 2\rho\cos^2\theta\sin\theta.$$

A questo punto utilizziamo la seguente maggiorazione

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq 2\rho,$$

dato dunque $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ in modo tale che se $\rho = \sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ allora

$$\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \varepsilon,$$

che è quanto occorre per provare il risultato tramite la definizione di limite per $(x,y) \to (0,0)$.

Questo esempio contiene l' idea di un criterio generale per provare l' esistenza di un limite.

Criterio. *Se si riesce a scrivere una maggiorazione del tipo*

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - l| \leq g(\rho),$$

con $\lim_{\rho\to0^+} g(\rho) = 0$, *allora si può concludere che*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l.$$

Osservazione. Il criterio precedente è un modo di calcolare il limite tramite la seguente equazione (che si può provare per esercizio)

$$\lim_{\rho\to0^+}\left[\sup_{\theta\in[0,2\pi]} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\right] = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),$$

senza calcolare esplicitamente il sup nnel termine a sinistra.

Esercizi. Si dica se le seguenti funzioni sono infinitesime per $(x,y) \to (0,0)$:

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \frac{x^3y}{x^4+y^2}, \frac{xy^3}{x^4+y^2}, \frac{x^2y}{x^4+y^2}, \frac{x^3y^3}{x^3+y^3}.$$

- Si dica se è vero che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizi. Dato $\varepsilon > 0$ si trovi un $\delta > 0$ (non necessariamente il migliore) in modo tale da verificare la continuità nei punti indicati delle seguenti funzioni:

$$\frac{x}{y} \quad \text{in } (0,1), \frac{x+y}{x-y} \quad \text{in } (0,1), \frac{\sin x}{1+y} \quad \text{in } (0,1), \frac{1+x}{\sqrt{1+y}} \quad \text{in } (0,1).$$

3. Teoremi sulle funzioni continue.

Descriviamo ora i teoremi principali sulle funzioni (scalari) continue. Del primo non forniamo la dimostrazione.

Teorema (di Weiertrass). *Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ compatto e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette il minimo ed il massimo assoluti.*

Ricordiamo anche il teorema degli zeri.

Teorema (degli zeri). *Sia $D \subset \mathbb{R}^n$ un insieme connesso per archi e sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se esistono $v, w \in D$ tali che $f(v)f(w) < 0$, allora esiste $z \in D$ tale che $f(z) = 0$.*

Dim. Poiché D è connesso per archi, sia $\gamma : [a,b] \to D$ un arco di curva continuo tale che $\gamma(a) = v$, $\gamma(b) = w$. Alla funzione composta $f \circ \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \circ \gamma(t) = f(\gamma(t))$ possiamo applicare il teorema degli zeri per funzioni di una variabile. Infatti essa è continua e $f(\gamma(a))f(\gamma(b)) < 0$. Dunque esiste $\bar{t} \in [a,b]$ tale che, posto $z = \gamma(\bar{t})$, si ha $f(z) = f(\gamma(\bar{t})) = 0$. $\square$

Osservazione. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è aperto connesso ed $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione continua che cambia segno (cioè esistono due punti $P, Q \in A$ tali che $f(P) > 0, f(Q) < 0$) allora l' insieme di livello

$$\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = 0\}$$

consta di infiniti punti.

4. Le funzioni a gradiente nullo

Proviamo il seguente risultato.

Teorema. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso per archi. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 tale che $Df(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, per ogni $\mathbf{x} \in A$, allora f è costante.*

Dimostrazione. Scegliamo comunque due punti $P, Q \in A$ e proviamo che la funzione f assume in essi lo stesso valore. Per la definizione di insieme connesso per archi, esiste una curva, che possiamo assumere regolare a tratti, $\gamma : [a,b] \to A$ tale che $\gamma(a) = P, \gamma(b) = Q$. Per la derivavzione delle fufnzioni composte, se consideriamo la restrizione di f alla curva γ, la sua derivata vale

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0.$$

Dunque la funzione $f \circ \gamma$ è costante su $[a,b]$ e, in particolare, $f(P) = f(\gamma(a)) = f(\gamma(b)) = f(Q)$. $\square$

5. Sul teorema di cambio di variabili nell' integrale multiplo

Indicheremo una funzione che rappresenta un cambio di coordinate nel piano nel modo seguente:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v)),$$

o brevemente tramite il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v). \end{cases}$$

È facile verificare che un cambio di variabili non mantiene inalterate le aree degli insiemi. Ad esempio, nel semplice caso di una trasformazione lineare

$$\begin{cases} x = a_{11}u + a_{12}v, \\ y = a_{21}u + a_{22}v, \end{cases}$$

il quadrato generato dagli elementi della base canonica $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ ha come immagine il parallelogramma generato dai vettori $(a_{11} \quad a_{21}), (a_{12} \quad a_{22})$ cioè dalle colonne della matrice della trasformazione. Quindi l' area unitaria diviene un' area pari al modulo del determinante della matrice della trasformazione. Più in generale, dato una cambio di variabile qualunque, ma di classe C^1, possiamo usare la formula di Taylor per ottenerne una approssimazione lineare. Risulta infatti che, attorno ad un punto (u_o, v_o),

$$f(u,v) = f(u_o,v_o) + Df(u_o,v_o)\begin{pmatrix} u-u_o \\ v-v_o \end{pmatrix} + o(\sqrt{(u-u_o)^2+(v-v_o)^2}),$$

$$\text{per } (u,v) \to (u_o,v_o),$$

ove indichiamo la matrice Jacobiana

$$Df(u_o,v_o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_o,v_o) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_o,v_o) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_o,v_o) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_o,v_o) \end{pmatrix}.$$

Quindi attorno ad un assegnato punto (u_o, v_o) un cambio di coordinate si comporta al primo ordine come una traslazione $(u_o, v_o) \longmapsto f(u_o, v_o)$ (che non modifica le aree) seguita da una trasformazione lineare determinata dalla matrice Jacobiana $Df(u_o, v_o)$. Applicando il cambio di coordinate al calcolo di un integrale multiplo, ci aspettiamo perciò euristicamente che l' elemento infinitesimo d' area $dx\, dy$ venga sostituito da $|\det Df(u_o, v_o)|\, du\, dv$. Si riesce infatti a provare il seguente teorema.

Teorema (di cambio di variabili). *Sia* $A \subset \mathbb{R}^2$ *un insieme aperto e sia* $f : A \to \mathbb{R}^2$ *una funzione invertibile (iniettiva), di classe* C^1*, e tale che* $|det\, Df(u,v)| \neq 0$ *per ogni* $(u,v) \in A$*, ove* $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ *e* $Df = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ *è la matrice Jacobiana di* f*. Se* $D \subset A$ *e* $F : f(D) \to \mathbb{R}$ *è una funzione continua si ha allora che*

$$\int_{f(D)} F(x,y)\, dx\, dy = \int_D F(x(u,v), y(u,v))|det\, Df(u,v)|\, du\, dv.$$

6. Solidi e superfici di rotazione

Ci occupiamo di solidi di rotazione. In $\mathbb{R}^3$, consideriamo un sottoinsieme del piano yz, $D \subset \{(0, y, z) : y \geq 0\}$. Sia Ω il solido ottenuto dalla rotazione di D attorno all' asse z. Quest' insieme avrà una rappresentazione cartesiana data da

$$\Omega = \{(x, y, z) : (0, \sqrt{x^2 + y^2}, z) \in D\},$$

oppure, vista la simmetria assiale, una rappresentazione in coordinate cilindriche

$$\Omega' = \{(\theta, \rho, z) : \theta \in [0, 2\pi], (0, \rho, z) \in D\} = [0, 2\pi] \times D$$

che è un insieme $\theta-$semplice. Visto il teorema di cambio di variabili, possiamo allora calcolare

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\ dy\ dz = \iiint_{\Omega'} \rho\ d\rho\ d\theta\ dz \\ &= \int_0^{2\pi} (\iint_D \rho\ d\rho\ dz)\ d\theta = 2\pi \iint_D \rho\ d\rho\ dz.\end{aligned}$$

Abbiamo cosí provato il

Teorema (primo di Guldino). *Sia $D \subset \{(0, y, z) : y \geq 0\}$. Il volume del solido di rotazione Ω ottenuto ruotando D attorno all' asse z vale*

$$Vol(\Omega) = 2\pi \iint_D y\ dy\ dz = 2\pi \overline{y}\ Area(D),$$

ove $\overline{y}$ é la distanza del baricentro di D dall' asse di rotazione.

Discutiamo ora le superficie di rotazione. Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, una curva regolare il cui supporto $\gamma([a, b]) \subset \{(0, y, z) : y > 0\}$. Facendo ruotare il supporto della curva attorno all' asse z, costruiamo una superficie di rotazione. Essa é una superficie parametrica regolare parametrizzata da $r : [0, 2\pi] \times [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $r(\theta, t) = (y(t) \cos\theta, y(t) \sin\theta, z(t))$. Risulta infatti $|r_\theta \wedge r_t| = y(t)\sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} \neq 0$, per $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$. Possiamo calcolare l' area di tale superfice e risulta

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(r) &= \iint_{[0,2\pi]\times[a,b]} y(t)\sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2}\ d\theta\ dt \\ &= 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2}\ dt = 2\pi \int_\gamma y\ ds,\end{aligned}$$

da cui il seguente

Teorema (secondo di Guldino). *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare con $\gamma([a, b]) \subset \{(0, y, z) : y > 0\}$. L' area della superficie di rotazione S ottenuta ruotando $\gamma([a, b])$ attorno all' asse z vale*

$$Area(S) = 2\pi \int_\gamma y\ ds = 2\pi \overline{y}\ L(\gamma),$$

ove $\overline{y}$ é la distanza del baricentro di γ dall' asse di rotazione e $L(\gamma)$ é la lunghezza della curva.

7. La formula di Gauss-Green

Ricordiamo il

Teorema (di Gauss-Green). *Sia D un dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ e sia $F = (P, Q) : D \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1. Allora*

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy.$$

Applichiamo la formula precedente ad un campo vettoriale $F = (P, Q, 0) : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, con $F = F(x, y)$, in modo tale che rot $F = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\mathbf{k}$. Possiamo allora riscrivere la formula del teorema come (qui $\omega = Pdx + Qdy$)

$$\int_{\partial^+ D} F \cdot d\mathbf{s}(= \int_{\partial^+ D} \omega) = \iint_D \text{rot } F \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy.$$

Il termine a destra della precedente equazione è il flusso del rotore di F attraverso la "superficie" di $\mathbb{R}^3$ D orientata con il versore normale $\mathbf{k}$. Tale formula é un esempio del piú generale Teorema di Stokes o del rotore.

Consideriamo ora un campo vettoriale $F = (Q, -P) : D \to \mathbb{R}^2$ e ricordiamo che div $F = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})$. Supponiamo che $\partial^+ D$ sia parametrizzata da un' unica curva regolare $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Calcoliamo allora, usando ancora la formula di Gauss-Green

$$\begin{aligned}\iint_D \text{div } F\, dx\, dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\, dx\, dy &= \int_{\partial^+ D} (P, Q) \cdot d\mathbf{s} \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t))\, dt\end{aligned}$$

$$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot n(\gamma(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_{\partial D} F \cdot \mathbf{n}\, ds,$$

ove $n(\gamma(t))) = \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, \frac{-x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)$ é il versore normale esterno al dominio D nel punto $\gamma(t) \in \partial D$. La formula ottenuta,

$$\iint_D \text{div } F\, dx\, dy = \int_{\partial D} F \cdot \mathbf{n}\, ds,$$

rappresenta il caso due dimensionale del Teorema di Gauss e il termine a destra é il flusso esterno del campo F attraverso ∂D.

8. Forme differenziali

Completiamo quanto presente sul testo con il seguente risultato che descrive il numero di primitive di una data forma differenziale.

Teorema. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e sia ω una forma differenziale a coefficienti continui su A. Se f_1, f_2 sono due primitive di ω, allora $f_1 - f_2$ è costante su A.*

Dimostrazione.. Se f_1, f_2 sono due primitive di ω, allora $\omega = df_1 = df_2$. In particolare $D(f_1 - f_2) = Df_1 - Df_2 = 0$ nell' aperto connesso per archi A. Quindi $f_1 - f_2$ è costante per il teorema sulle funzioni a gradiente nullo del paragrafo 4.

9. Equazioni differenziali

Discutiamo qui alcuni aspetti introduttivi della teoria delle equazioni differenziali. Per maggiori dettagli si consulti il testo. Ci occupiano di equazioni che si presentano nella forma

$$F(t, u(t), u'(t), u''(t), \dots, u^{(n)}(t)) = 0, \quad I \subset \mathbb{R}$$

ove l' incognita è una funzione $u : I \to \mathbb{R}$ ed $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo. L' incognita compare nell' equazione direttamente o tramite le sue derivate fino all' ordine n, che chiameremo l' ordine dell' equazione. Spesso la variabile indipendente t assume il significato fisico del tempo.

Le equazioni differenziali compaiono naturalmente in modelli per le scienze applicate e l' ingegneria. Ad esempio discutiamo il modello di Malthus per la dinamica di una popolazione. Detta $N(t)$ l' entità della popolazione all' istante t, assumiamo che la dinamica della popolazione sia condizionata solo da nascite, con un tasso di crescita λ per unità di popolazione e di tempo, e da morti, con un tasso di morte pari a μ per unità di popolazione e di tempo. Dato un intervallo temporale pari a $h > 0$, individuiamo quindi il valore della popolazione all' istante $t + h$ come

$$N(t + h) \simeq N(t) + \lambda h N(t) - \mu h N(t),$$

ove l' approssimazione è dovuta al fatto di considerare costante la popolazione nell' intervallo ed è tanto migliore quanto più piccolo è h. Dividendo per h otteniamo che

$$\frac{N(t + h) - N(t)}{h} \simeq (\lambda - \mu)N(t)$$

e passando al limite per $h \to 0^+$

$$N'(t) = (\lambda - \mu)N(t).$$

Questa è l' equazione differenziale che regola la dinamica della popolazione.

Osserviamo che già la semplice equazione differenziale per il calcolo della primitiva

$$u'(t) = f(t)$$

per un dato $f : I \to \mathbb{R}$ continuo ammette infinite soluzioni. Tali soluzioni si riducono ad una soltanto se imponiamo ad esse una condizione del tipo

$$u(t_o) = u_o \in \mathbb{R}$$

ad un assegnato istante di tempo $t_o \in I$. Questo motiva la seguente definizione.

Definizione. *Diremo problema di Cauchy per l' equazione di Malthus il sistema*

$$\begin{cases} N'(t) = (\lambda - \mu)N(t), \\ N(t_o) = N_o \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La seconda condizione prende il nome di condizione iniziale.

Equazioni a variabili separabili Si dicono a variabili separabili equazioni del primo ordine che si presentano nella forma

$$y'(t) = a(t)b(y(t)),$$

per funzioni continue $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : D \to \mathbb{R}$. Calcoliamone l' integrale generale, vale a dire l' insieme di tutte le soluzioni.

Innanzitutto cerchiamo eventuali soluzioni costanti. Queste si trovano risolvendo l' equazione

$$b(y) = 0.$$

Infatti se $b(\hat{y}) = 0$ allora la funzione $y(t) \equiv \hat{y}$ è una soluzione dell' equazione.

Escludendo soluzioni costanti riscriviamo l' equazione a variabili separate, vale a dire

$$\frac{y'(t)}{b(y(t))} = a(t)$$

e integriamo ambo i membri. Mediante il cambio di variabile $y = y(t)$, otteniamo

$$\int \frac{1}{b(y)} dy = \int a(t) dt.$$

Considerate allora le primitive $A' = a$, $Z' = 1/b$, otteniamo l' espressione implicita dell' integrale generale

$$Z(y(t)) = A(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Negli intervalli in cui Z è invertibile, possiamo ricavare l' integrale generale in forma esplicita come

$$y(t) = Z^{-1}(A(t) + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Per il problema di Cauchy relativo ad un' equazione a variabili separabili, si può formulare il seguente risultato.

Teorema. *Data l' equazione a variabili separabili, se il coefficiente a è una funzione continua e b è di classe C^1, allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(t) = a(t)b(y(t)), \\ y(t_o) = y_o \in D \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione definita in un intorno dell' istante iniziale $t_o \in I$.

Si può ossservare che il teorema di unicità ha come conseguenza geometrica importante il fatto che i grafici di due soluzioni distinte non possono incontrarsi in un punto.

Proviamo a risolvere il modello di Malthus. L' equazione

$$y'(t) = ky(t), \quad k \in \mathbb{R}$$

è a variabili separabili. La sua unica soluzione costante è $y \equiv 0$. Per trovare le soluzioni non costanti integriamo

$$\int k dt = kt + c, \quad \int \frac{1}{y} dy = \log |y| + c.$$

Quindi ricaviamo

$$\log(|y(t)|) = kt + c,$$

in forma implicita e

$$y(t) = c_1 e^{kt}, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

in forma esplicita. Per $c_1 = 0$ la formula precedente contiene anche la soluzione costante.

Esercizi risolti in classe. *1. Risolvere il problema di Cauchy* $y' = 1/y, y(0) = 2$. *2. Trovare l' integrale generale di* $y' = 2t\sqrt{1-y^2}$ *e discutere i problemi di Cauchy con condizioni* $y(0) = 0$ *e* $y(0) = -1$. *3. Trovare l' integrale generale di* $y' = 2y(1-4y)$. *4. Risolvere il problema di Cauchy* $y' = \frac{(1+y)^2}{t}$, $y(1) = 2$.

Equazioni lineari del primo ordine. Diciamo equazioni lineari del primo ordine quelle che si presentano nella forma

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t),$$

ove $a, f : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue. Tali equazioni hanno un' integrale generale che ora calcoliamo. Troviamo una primitiva $A' = a$ e moltiplichiamo ambo i membri dell' equazione per $e^{A(t)}$. Otteniamo

$$\frac{d}{dt}[e^{A(t)}y(t)] = e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) = e^{A(t)}f(t)$$

e quindi integrando

$$e^{A(t)}y(t) = \int e^{A(t)}f(t)dt$$

oppure fissato $t_o \in I$

$$y(t) = e^{-A(t)}[\int_{t_o}^{t} e^{A(s)}f(s)ds + c], \quad c \in \mathbb{R}.$$

È chiaro che conoscere il valore $y(t_o)$ individua un' unica scelta per la costante c.

Esercizio svolto in classe. Risolvere il problema di Cauchy $y'(t) + \frac{2t}{1+t^2}y(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}$, $y(-1) = 0$.

Equazioni lineari a coefficienti costanti del secondo ordine.
Le equazioni che ora consideriamo si scrivono nella forma

$$ay''(t) + 2by'(t) + cy(t) = f(t),$$

per $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Diremo omogenea associata la corrispondente equazione scritta per $f \equiv 0$.

Studiamo dapprima le equazioni lineari omogenee ($f \equiv 0$). Osserviamo che per esse vale il *principio di sovrapposizione*: se y_1 y_2 sono soluzioni dell' equazione lineare omogenea e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, allora anche

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

è una soluzione della medesima equazione.

Per una equazione omogenea cerchiamo soluzioni nella forma $y(t) = e^{rt}$ per un opportuno valore di $r \in \mathbb{R}$. Sostituendo nell' equazione differenziale y e le sue derivate, troviamo la condizione

$$e^{rt}(ar^2 + 2br + c) = 0.$$

Troviamo dunque una soluzione nella forma esponenziale purchè r sia uno zero del polinomio caratteristico

$$ar^2 + 2br + c.$$

Indichiamo con $\Delta = b^2 - ac$ il discriminante del polinomio caratteristico. Appare chiaro che la discussione sulle soluzioni dell' equazione differenziale dipenderà dal segno del discriminante. Descriviamo ora l' integrale generale dell' equazione omogenea

$$ay''(t) + 2by'(t) + cy(t) = 0$$

nei vari casi.

Se $\Delta > 0$, detti r_1, r_2 i due zeri distinti del polinomio caratteristico l' integrale generale si scrive come

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se $\Delta = 0$, detto $\hat{r}$ l' unico zero del polinomio caratteristico (con molteplicità 2), l' integrale generale risulta

$$y(t) = c_1 e^{\hat{r}t} + c_2 t e^{\hat{r}t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si verifichi a tale proposito per esercizio che effettivamente $y(t) = te^{\hat{r}t}$ soddisfa l' equazione differenziale.

Se infine $\Delta < 0$ allora l' integrale generale si scrive come

$$y(t) = e^{-\frac{b}{a}t}(c_1 \cos(\frac{\sqrt{-\Delta}}{a}t) + c_2 \sin(\frac{\sqrt{-\Delta}}{a}t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si verifichi che in effetti tali funzioni risolvono l' equazione differenziale.

Esempi fatti in classe. Trovare l' integrale generale delle seguenti equazioni: $y'' - 4y = 0$, $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y'' + 8y = 0$.

In tutti i casi, l' intergale generale dipende da due costanti arbitrarie. Per individurle entrambe, appare ragionevole aspettarsi due condizioni aggiuntive. Formuliamo allora il problema di Cauchy per un' equazione del secondo ordine.

Teorema. *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *intervallo e sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora il problema di Cauchy per* $t_o \in I$*,*

$$\begin{cases} y'(t) + a(yt)y(t) = f(t), \\ y(t_o) = y_o, \\ y'(t_o) = y_1. \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione definita in I*.*

Esercizio. Risolvere il problema di Cauchy $y'' + 2y' + 3y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Riprendiamo ora in considerazione un' equazione non omogenea e descriviamo il suo integrale generale mediante la seguente proposizione.

Proposizione.. *L' integrale generale di un' equazione lineare*

$$ay''(t) + 2by'(t) + cy(t) = f(t),$$

si scrive nella forma

$$y(t) = z(t) + \hat{y}(t),$$

ove $z(t)$ è l' integrale generale dell' omogenea associata e $\hat{y}(t)$ è un integrale particolare dell' equazione nonn omogenea.

Per applicare la proposizione precedente, non ci rimane che trovare un metodo per calcolare una delle soluzioni dell' equazione, almeno in alcuni casi.

Calcolo della soluzione particolare nel caso in cui $f(t) = P(t)e^{\lambda t}$, ove P è un polinomio di grado n. Questo caso contiene come casi particolari quello dei polinomi ($\lambda = 0$) e delle funzioni esponenziali (P costante). Occorre controllare se λ sia zero del polinomio caratteristico.

Se λ non è zero del polinomio caratteristico si cerca come soluzione particolare $\hat{y}(t) = Q(t)$ ove Q è un polinomio generico di grado n.

Se λ è uno zero del polinomio caratteristico di molteplicità 1, si cerca come soluzione particolare $\hat{y}(t) = tQ(t)$, Q come sopra.

Se λ è uno zero del polinomio caratteristico con molteplicità 2, si cerca come soluzione particolare $\hat{y}(t) = t^2Q(t)$, Q come sopra.

Esempi visti in classe: $y'' - 7y = 1 + t^2$, $y'' - y = e^t$, $y'' + 9y = e^{2t} + t^2$. Nell' ultimo caso si trovano separatamente gli integrali particolari di $y'' + 9y = e^{2t}$ e $y'' + 9y = t^2$ che vanno poi sommati tra loro per il principio di sovrapposizione.

Calcolo della soluzione particolare nel caso in cui $f(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin\lambda t$. Si cerca una soluzione particolare nella forma $\hat{y}(t) = c_1\cos(\lambda t) + c_2\sin\lambda t$ se $i\lambda$ non è zero del polinomio caratteristico, oppure $\hat{y}(t) = t(c_1\cos(\lambda t) + c_2\sin\lambda t)$ nel caso in cui $i\lambda$ sia zero del polinomio caratteristico. Esempio visto in classe: $y''(t) + 4y(t) = \cos 2t$.