

PRESENTAZIONE

Nel passaggio dalla scuola superiore all'università molti studenti incontrano difficoltà non indifferenti. Cambia l'ambiente, cambiano i rapporti con i docenti e con l'istituzione, cambia il modo di studiare. Ma la difficoltà maggiore consiste, da sempre, nella scelta del corso di laurea: non tutti riescono ad effettuare una scelta consapevole e corrispondente alle proprie capacità e inclinazioni.

Più di 15 anni fa, l'Unione Matematica Italiana diffuse un "Syllabus di Matematica", ovvero una specie di manifesto delle conoscenze e abilità minime indispensabili per affrontare un corso di laurea con elevati contenuti matematici.

Molte cose sono cambiate in questi 15 anni; l'Unione Matematica Italiana ha allora deciso di diffondere una nuova edizione del Syllabus, molto più estesa ed elaborata della precedente.

Il Syllabus si rivolge principalmente agli allievi degli ultimi anni delle Scuole Secondarie Superiori che intendono mettere alla prova le proprie doti individuali e le conoscenze apprese in vista di una possibile, prossima iscrizione ad una Facoltà scientifica e, più precisamente, a uno dei corsi di laurea dell'area scientifica e scientifico-tecnologica oppure dell'area tecnico-progettuale, cioè quelli con più alto contenuto matematico.

Proprio perché proiettato verso il futuro immediato dello studente, il Syllabus astrae dai programmi di insegnamento ministeriali e dalle problematiche attuali della scuola. Sarebbe quindi errato trarre da esso indicazioni di carattere didattico su cosa si deve insegnare e come lo si deve insegnare. La scuola deve infatti puntare alla maturazione completa dello studente (e le scelte del docente devono essere funzionali a tale obiettivo) mentre il Syllabus intende verificarne le vocazioni.

Inoltre, lo scopo principale del Syllabus dovrebbe essere non certo quello di dissuadere dall'isciversi ad una Facoltà scientifica coloro che temono di non essere portati per quel tipo di studi ma, al contrario, avvicinare alla matematica studenti che, facendo prevalere considerazioni di natura diversa, potrebbero finire per fare delle scelte non in armonia con i propri interessi e le proprie predisposizioni.

L'Unione Matematica Italiana si ripropone di aggiornare periodicamente questo Syllabus, in modo da mantenerlo adeguato ai cambiamenti che continuamente si verificano nel mondo dell'educazione, tenendo conto anche e soprattutto di commenti e suggerimenti che studenti e docenti vorranno indirizzarci.

Il Presidente dell'UMI
Prof. Alberto Conte

SYLLABUS DI MATEMATICA

Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università

*Suggerimenti dell'Unione Matematica Italiana
per la preparazione all'accesso alle Facoltà scientifiche*

Introduzione

L'Unione Matematica Italiana si è proposta, offrendo questo *Syllabus*, di fornire alcuni suggerimenti riguardanti i contenuti minimi di conoscenze e capacità necessari per affrontare gli insegnamenti matematici delle principali Facoltà scientifiche universitarie.

Questo *Syllabus* è stato dunque compilato in primo luogo per gli studenti che, dopo aver superato la maturità, intendono iscriversi ad un corso universitario che richieda una buona preparazione matematica (Matematica, Fisica, Ingegneria, Informatica, Statistica, Economia, Scienze Biologiche, Chimica, Scienze Geologiche, ...). Gli estensori ritengono tuttavia che esso possa essere utile anche a coloro che intendono iscriversi ad uno dei numerosi corsi universitari in cui la matematica, pur non essendo oggetto di studio, o pur essendolo in modo marginale, viene impiegata come linguaggio o come strumento. Anche se i prerequisiti di conoscenze e di abilità matematiche richiesti sono diversi per i diversi corsi universitari, tuttavia questo *Syllabus*, benché non differenziato, potrà essere utile strumento per l'accesso ad una vasta gamma di Facoltà e Corsi di Laurea e di Diploma. In ogni caso il presente *Syllabus* potrà anche essere utilmente impiegato ai fini di una verifica della preparazione matematica acquisita a conclusione della Scuola Secondaria.

In genere, nell'insegnamento della matematica a livello universitario, molte nozioni vengono riprese dall'inizio e quindi potrebbero — in linea di principio — essere ignorate dagli studenti che si accingono ad entrare nell'Università. Tuttavia, la velocità e l'ampiezza con cui si sviluppano i corsi universitari di contenuto matematico sono tali che risulta difficile seguirli se le conoscenze elementari non sono già in parte bene assestate e se la mente non è già stata affinata ed allenata in modo assiduo ed intelligente. Per queste ragioni si è ritenuto opportuno elencare in questo *Syllabus* anche alcuni argomenti di base che risultano essere solitamente trattati (di nuovo e più approfonditamente) nei corsi universitari e la cui conoscenza non è quindi da considerare un prerequisito irrinunciabile. Tali argomenti vengono indicati nel seguito con un asterisco "*".

Il *Syllabus* si compone di cinque "temi", illustrati nel primo capitolo; ognuno dei temi è suddiviso in due colonne affiancate. La prima colonna, intitolata "sapere", elenca le conoscenze minime necessarie per poter frequentare con profitto un corso di matematica a livello universitario; la seconda colonna, intitolata "saper fare", elenca le capacità operative collegate.

Nel secondo capitolo vengono proposti alcuni "esercizi e quesiti illustrativi", suddivisi per ciascun tema. Mentre il "sapere" ed il "saper fare" hanno una certa organicità, la sezione degli esercizi offre solo un piccolo saggio degli innumerevoli quesiti e problemi che si possono porre.

Per renderne più proficua l'utilizzazione, gli esercizi ed i quesiti proposti sono stati graduati, in relazione alla loro difficoltà, in due livelli. Gli esercizi ed i quesiti del primo livello (denominato "livello base") sono tali che lo studente, al quale il *Syllabus* è rivolto, dovrebbe essere in grado di affrontarli e risolverli senza particolari problemi. I quesiti del secondo

livello (denominati “*questiti che richiedono maggiore attenzione*”) sono invece più impegnativi e, per la loro risoluzione, possono richiedere talvolta anche un pizzico di inventiva. In ogni caso di tutti gli esercizi e quesiti proposti viene fornita una esauriente spiegazione e risposta. Riteniamo di poter affermare che lo studente che sappia rispondere ad un buon numero di quesiti proposti possa sentirsi abbastanza tranquillo per affrontare un corso di studi universitari che richieda una buona preparazione di carattere matematico.

A conclusione del Syllabus, nel terzo capitolo, viene proposto un “*test di autovalutazione*” sulla preparazione dello studente. Il test è preceduto da una illustrazione dei criteri da utilizzare per la valutazione delle singole risposte.

È opportuno segnalare esplicitamente che questo Syllabus contiene alcune domande a cui molti studenti forse non sapranno rispondere. Ciò non deve spaventare eccessivamente, ma deve soltanto costituire un ulteriore stimolo ad affrontare gli studi universitari con impegno adeguato. Eventuali lacune potranno essere facilmente colmate da quanti seguiranno con successo i corsi universitari di matematica del primo anno.

CAPITOLO I

Sapere, Saper fare

Contenuti minimi di conoscenze e capacità per poter frequentare
con profitto un corso di contenuto matematico a livello universitario

Nota. L'asterisco sta ad indicare un argomento che viene in genere nuovamente trattato nei corsi universitari e la cui conoscenza non è quindi da considerarsi un prerequisito, anche se tuttavia può essere d'aiuto.

Tema 1
Strutture numeriche, aritmetica

SAPERE	SAPER FARE
I numeri naturali: operazioni aritmetiche e loro proprietà.	Semplici calcoli mentali.
La divisione con resto.	
Numeri primi.	Scomposizione di un numero naturale in fattori primi.
Massimo comune divisore e minimo comune multiplo.	
Le frazioni numeriche: operazioni e ordinamento.	Saper sommare e moltiplicare le frazioni; date due frazioni, saper riconoscere se sono equivalenti o qual è la maggiore. Calcolo di percentuali.
I numeri interi relativi. I numeri razionali relativi.	
Rappresentazione dei numeri come allineamenti; allineamenti con virgola, finiti o periodici.	
Idea intuitiva dei numeri reali.	* Saper dimostrare che $\sqrt{2}$ non è razionale.
Disuguaglianze e relative regole di calcolo.	Trasformazione di una disuguaglianza in un'altra equivalente. Somma membro a membro, moltiplicazione o divisione per un dato numero.

Valore assoluto.	* Semplici disuguaglianze con l'uso del valore assoluto.
Potenze e radici.	Calcolo con le potenze e calcolo con le radici. Saper operare con le disuguaglianze quando si eleva a potenza o si estrae una radice.
Media aritmetica e media geometrica di due numeri positivi.	
Logaritmi e loro proprietà.	Saper applicare le proprietà dei logaritmi.
Logaritmo decimale e sua relazione con la rappresentazione decimale dei numeri.	
* Basi numeriche.	* Saper rappresentare un numero naturale in basi diverse.

Tema 2

Algebra elementare, equazioni, disequazioni

SAPERE	SAPER FARE
Elementi di calcolo letterale, uso delle parentesi.	Saper semplificare un'espressione algebrica (riduzione di termini simili, cancellazione di termini opposti, ecc.).
Polinomi.	Somma e prodotto di polinomi.
Prodotti notevoli. * Potenza n -esima di un binomio.	
Divisione con resto tra polinomi. Regola di Ruffini. * I polinomi come funzioni e il teorema di identità dei polinomi (un enunciato preciso, anche senza dimostrazione).	Saper "fattorizzare" un polinomio in casi semplici.
Espressioni razionali fratte.	Somma e prodotto di espressioni razionali fratte.
Identità ed equazioni: nozione di soluzione.	Saper semplificare o trasformare un'equazione in un senso desiderato (regole per il passaggio di un addendo oppure di un fattore da un membro all'altro ecc.).
Equazioni algebriche di primo e secondo grado.	Saper risolvere anche equazioni di grado superiore in casi particolari. Applicazioni della legge di annullamento del prodotto.
Sistemi lineari di due equazioni in due incognite.	Saper applicare uno o più metodi risolutivi per i sistemi lineari.

Disequazioni.

Saper semplificare o trasformare una disequazione in un senso desiderato (regole per il passaggio di un addendo oppure di un fattore da un membro all'altro ecc.).

Disequazioni algebriche di primo e secondo grado.

Disequazioni con espressioni fratte. Radicali, disequazioni con radicali.

Tema 3

Insiemi, elementi di logica, calcolo combinatorio, relazioni e funzioni

SAPERE	SAPER FARE
Linguaggio elementare degli insiemi; appartenenza, inclusione, intersezione, unione, complementare, insieme vuoto.	* Saper interpretare formule insiemistiche e saper dimostrare semplici identità insiemistiche.
Coppie ordinate (prodotto cartesiano).	
Relazioni, funzioni (o applicazioni).	
* Relazioni di equivalenza e di ordine.	
* Funzioni iniettive, suriettive, biiettive (corrispondenze biunivoche).	
* Composizione di funzioni, funzione identica, funzione inversa di una funzione biiettiva.	
* Permutazioni, disposizioni semplici e con ripetizione, combinazioni semplici.	* Saper calcolare il numero dei sottoinsiemi composti da k elementi di un insieme con n elementi.
Connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione.	
Implicazione. Condizioni sufficienti, condizioni necessarie.	

Conoscere il significato dei termini: assioma, definizione, teorema, lemma, corollario, ipotesi, tesi.

Dimostrazioni per assurdo.

Saper riconoscere ipotesi e tesi in un teorema.

* Quantificatori: \forall (per ogni) e \exists (esiste).

* Uso dei quantificatori.

Tema 4
Geometria

SAPERE

SAPER FARE

Geometria euclidea piana: incidenza, ordinamento, parallelismo, congruenza (in alcuni testi: uguaglianza). Esistenza e unicità della parallela e della perpendicolare per un punto ad una retta assegnata.

Lunghezza di un segmento (distanza tra due punti); corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i numeri reali.

Ampiezza degli angoli: misura in gradi. Lunghezza della circonferenza e misura degli angoli in radianti. Somma degli angoli interni di un triangolo. Relazioni tra gli angoli formati da due rette parallele tagliate da una trasversale.

Criteri di equiscomponibilità dei poligoni e nozione elementare di area. Area del cerchio. Relazioni tra aree di figure simili.

Misure e proporzionalità tra grandezze.

Saper eseguire cambiamenti di unità di misura.

Luoghi geometrici notevoli (asse di un segmento, bisettrice di un angolo, circonferenza ecc.).

* Figure convesse.

Proprietà delle figure piane: criteri di congruenza dei triangoli. Punti notevoli dei triangoli (baricentro, incentro, circocentro, ortocentro). Parallelogrammi. Teoremi di Talete, di Euclide, di Pitagora. Proprietà segmentarie e angolari del cerchio (corde, secanti, tangenti, arco sotteso da un angolo). Angoli al centro e alla circonferenza.

Trasformazioni geometriche del piano: isometrie e similitudini. Simmetrie rispetto ad una retta e rispetto ad un punto, traslazioni, rotazioni, omotetie e loro composizioni.

Coordinate cartesiane: equazioni di rette e circonferenze. Equazioni di semplici luoghi geometrici (parabole, ellissi, iperboli) in sistemi di riferimento opportuni.

Trigonometria: seno, coseno, tangente di un angolo. Identità trigonometrica fondamentale $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Formule di addizione.

Saper effettuare costruzioni geometriche elementari: asse di un segmento, bisettrice di un angolo, circonferenza passante per tre punti assegnati, retta passante per un punto e perpendicolare (oppure parallela) ad una retta assegnata. Saper svolgere alcune dimostrazioni geometriche; ad esempio, in relazione ai punti notevoli di un triangolo e alle proprietà dei parallelogrammi.

Saper interpretare geometricamente equazioni e sistemi algebrici. Saper tradurre analiticamente problemi geometrici come ad esempio: retta per un punto perpendicolare ad una retta assegnata; simmetrico di un punto rispetto ad una retta; immagine di un punto attraverso una traslazione o una rotazione con centro nell'origine.

Saper "risolvere" un triangolo (eventualmente con l'uso di un opportuno strumento di calcolo). Ad esempio: calcolare le ampiezze degli angoli di un triangolo rettangolo di cateti assegnati.

Geometria euclidea dello spazio: mutue posizioni di due rette, di due piani, di una retta e di un piano (angoli, parallelismo, perpendicolarità). Diedri e triedri.

Saper visualizzare una configurazione geometrica nello spazio. Per esempio: che cosa si ottiene intersecando (a) una sfera con un piano; (b) un prisma infinito a sezione rettangolare con un piano; (c) un cubo con un piano perpendicolare ad una diagonale?

Sfera, cono, cilindro.

Poliedri convessi, parallelepipedi, piramidi, prismi, poliedri regolari.

* Formula di Eulero.

Idea intuitiva di volume dei solidi. Formule per il calcolo del volume e dell'area della superficie di parallelepipedo, piramide, prisma, cilindro, cono e sfera. Relazioni tra aree e tra volumi di solidi simili.

* Consapevolezza dell'esistenza di geometrie in cui sono negati alcuni assiomi della geometria euclidea classica (geometrie non-euclidee).

Tema 5
Successioni e funzioni numeriche

SAPERE	SAPER FARE
Nozione di successione. * Successioni definite assegnando il termine generale e successioni definite per ricorrenza.	Saper riconoscere in casi semplici se una successione è crescente.
Progressioni aritmetiche e geometriche.	Saper effettuare semplici calcoli sulle progressioni, come ad esempio la somma dei primi n termini.
Le funzioni numeriche e i loro grafici. Dominio di una funzione. * Proprietà qualitative: crescita, decrescenza, zeri, limitatezza, massimi e minimi relativi e assoluti.	Saper interpretare il grafico di una funzione: riconoscere dal disegno gli intervalli dove la funzione cresce o decresce e dove assume valori positivi o negativi; individuare i punti di massimo o di minimo; riconoscere eventuali simmetrie (funzioni pari, funzioni dispari, funzioni periodiche).
Proprietà di alcune funzioni elementari: polinomi di primo e secondo grado, funzione potenza $x \mapsto x^a$; funzioni logaritmo $x \mapsto \log_a x$ ed esponenziale $x \mapsto a^x$ (con $a > 0$, $a \neq 1$); funzioni trigonometriche $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$. Loro grafici. La funzione logaritmo come inversa dell'esponenziale. Periodicità delle funzioni trigonometriche.	

N. B.: Il calcolo differenziale e integrale viene svolto in maniera approfondita e dettagliata sia negli insegnamenti di *Analisi Matematica* per i corsi di laurea in Matematica, Fisica, Ingegneria e Informatica, sia negli insegnamenti di *Matematica*, *Istituzioni di Matematica* e di *Matematica Generale* di altri corsi di laurea. Anche gli studenti che non hanno avuto occasione di acquisire nozioni di calcolo differenziale e integrale negli studi secondari pos-

sono dunque ragionevolmente pensare di iscriversi a uno dei corsi di laurea citati. Tuttavia conviene avvertire che gli strumenti del calcolo differenziale e integrale sono spesso usati fin dall'inizio in altri insegnamenti (Fisica, per esempio). Inoltre, soprattutto nei corsi di laurea dove l'insegnamento è impartito sulla base di semestri intensivi non è facile apprendere in poche settimane sia i fondamenti teorici sia la manualità.
