Completezza della Risoluzione

Il teorema di completezza per la risoluzione nella logica proposizionale è chiamato **ground resolution theorem**:

> *Se un insieme di clausole S è insoddisfacibile, allora la chiusura della risoluzione di tali clausole $RC(S)$ contiene la clausola vuota.*

La chiusura della risoluzione di un insieme di clausole corrisponde all'insieme ottenuto come punto fisso dalla applicazione ripetuta della risoluzione. In caso di terminazione con fallimento dell'algoritmo visto, corrisponde all'insieme $clauses$ alla fine della esecuzione.

La dimostrazione del teorema si ottiene dimostrando quanto segue:

> *Se la chiusura $RC(S)$ non contiene la clausola vuota, allora S è soddisfacibile.*

vediamo la dimostrazione di questa affermazione ...

Completezza della Risoluzione

Se $RC(S)$ non contiene la clausola vuota, allora si può costruire un modello per S. Infatti, si dia un ordine arbitrario ai simboli di predicato che compaiono in S, ottenendo $P_1, P_2, \dots, P_k$. Poi si segua la seguente procedura per costruire il modello:

`for` $i = 1$ `to` k

- *se esiste una clausola in $RC(S)$ contenente $\neg P_i$ tale che tutti gli altri letterali della clausola sono falsi a causa del valore di verità già assegnato ai $P_1, P_2, \dots, P_{i-1}$, allora assegna valore di verità $falso$ a P_i*
- *altrimenti assegna valore di verità $vero$ a P_i*

Mostriamo ora che tale procedura termina sempre con un modello per S.

Facciamo tale dimostrazione per induzione su i: supponiamo che sia possibile costruire il modello parziale per i simboli fino a P_{i-1} e mostriamo che tale modello può essere esteso per i simboli fino a P_i

Completezza della Risoluzione

Caso base $i = 1$.

In questo caso, in S non possono necessariamente essere presenti simultaneamente sia la clausola P_1 e $\neg P_1$, perchè altrimenti $RC(S)$ conterrebbe la clausola vuota. Quindi per $i = 1$ la procedura descritta si può applicare senza problemi: $P_1 \leftarrow false$ se è presente $\neg P_1$, altrimenti $P_1 \leftarrow vero$.

Ipotesi induttiva vera per $i - 1$.

Consideriamo una clausola C in $RC(S)$ che contiene P_i. Si hanno problemi ad assegnare un valore di verità a P_i solo se

- $C \equiv B \vee \neg P_i$, con B clausola che contiene solo simboli P_j con $j < i$
- esiste in $RC(S)$ una clausola $C' \equiv B' \vee P_i$ con B' clausola che contiene solo simboli P_j con $j < i$

Completezza della Risoluzione

Ma se questo succede, in $RC(S)$ deve essere presente anche la clausola $B \vee B'$ (che contiene solo simboli P_j con $j < i$) altrimenti $RC(S)$ non è la chiusura, ed a causa della ipotesi induttiva, l'assegnamento parziale fino a P_{i-1} non può rendere falsa sia B che B'. Quindi, se è falsa B, $P_i \leftarrow falso$, se invece è falsa B', $P_i \leftarrow vero$, ottenendo un modello parziale per i simboli fino all'indice i.

Si conclude che quando i raggiunge k, otteniamo un modello completo per S e quindi abbiamo dimostrato che S è soddisfacibile.