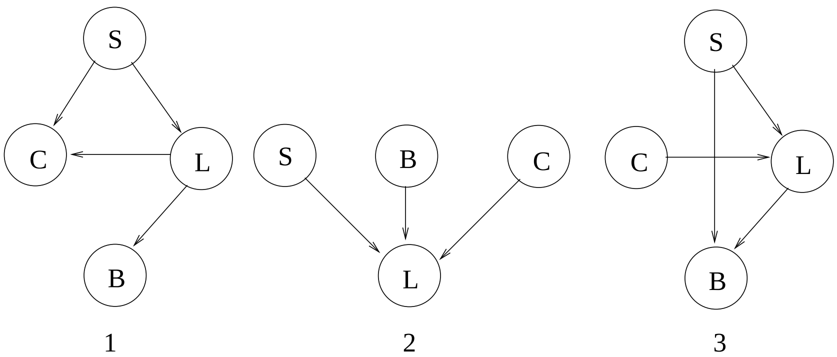
Esercizi su Reti Bayesiane

Esercizio 1

Si considerino le seguenti reti bayesiane



dove $S = fumare$, $L = neoplasia\ ai\ polmoni$, $C = tosse$, $B = risultato\ biopsia$. Tutte le variabili sono booleane, nessuna relazione è deterministica, e le reti bayesiane codificano conoscenza medica su una popolazione di ex-fumatori anziani.

a) dire quale rete bayesiana codifica meglio la conoscenza medica corrente

b) quale rete ha meno parametri ?

c) usando la rete (1) si derivi una espresssione simbolica per $P(B|S)$ che utilizzi le probabilità condizionali disponibili nella rete.

d) usando la rete (1) si derivi una espresssione simbolica per $P(L|B)$ che utilizzi le probabilità condizionali disponibili nella rete.

Soluzione:

a) la rete (1)

b) riferendoci in ordine ai nodi S, C, L, B:

   - la rete (1) ha 1+4+2+2=9 parametri;
   - la rete (2) ha 1+1+1+8=11 parametri;
   - la rete (3) ha 1+1+4+4=10 parametri.

   Quindi la risposta è: la rete (1).

c) usando la semantica globale della rete bayesiana:

$$\begin{aligned} P(B|S) &= \frac{P(B,S)}{P(S)} = \frac{1}{P(S)} \sum_{C=c,L=l} P(B,S,C,L) \\ &= \frac{1}{P(S)} \sum_{C=c,L=l} P(C|S,L)P(B|L)P(L|S)P(S) \\ &= \frac{1}{P(S)} P(S) \sum_{L=l} P(B|L)P(L|S) \sum_{C=c} P(C|S,L) \end{aligned}$$

   e poiché $\sum_{C=c} P(C|S,L) = 1$, si ha $P(B|S) = \sum_{L=l} P(B|L)P(L|S)$. Si noti che $P(B|S)$ è indipendente da C, infatti la variabile C è *irrilevante* per la query: C non è avo ne' di B, ne' di S.

d) usando la regola di Bayes: $P(L|B) = \frac{P(B|L)P(L)}{P(B)}$. Rimane da calcolare

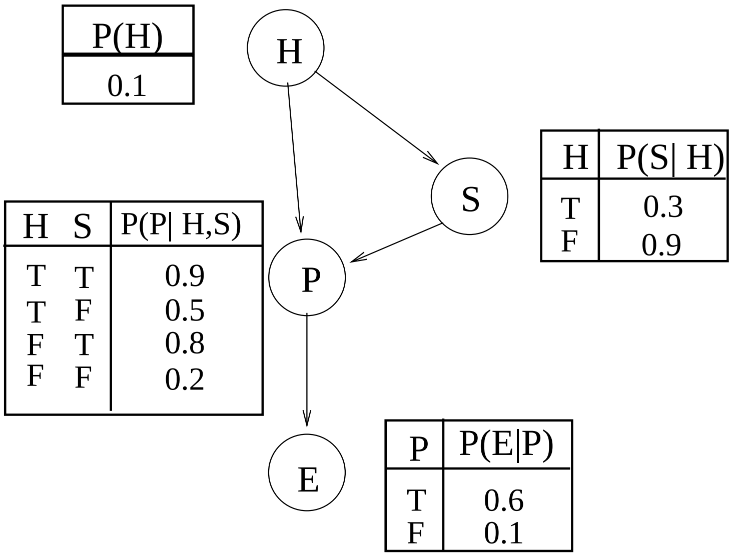
$$\begin{aligned} P(L) &= \sum_{S=s,C=c,B=b} P(B,S,C,L) \\ &= \sum_{S=s,C=c,B=b} P(C|S,L)P(B|L)P(L|S)P(S) \\ &= \sum_{S=s} P(L|S)P(S) \underbrace{\sum_{B=b} P(B|L)}_{=1} \underbrace{\sum_{C=c} P(C|S,L)}_{=1} \end{aligned}$$

   e quindi

$$P(L|B) = \frac{1}{P(B)} P(B|L) \sum_{S=s} P(L|S)P(S) = \alpha P(B|L) \sum_{S=s} P(L|S)P(S)$$

Esercizio 2

Si consideri la seguente rete bayesiana che codifica conoscenza riguardante la probabilità per un politico di essere eletto



dove $H = onesto$, $S = abile$, $P = popolare$, $E = eletto$.

a) dire se la struttura della rete implica $P(H, S) = P(H)P(S)$ e/o $P(E|P, H) = P(E|P)$.

b) calcolare $P(h, s, \neg p, \neg e)$

c) dato un politico onesto, calcolare la distribuzione di probabilità per la sua elezione

Soluzione:

a) $P(H, S) \neq P(H)P(S)$ poiché nella rete c'è un arco da H ad S, mentre $P(E|P, H) = P(E|P)$ poiché, usando la semantica locale di una rete bayesiana, un nodo (in questo caso E) è condizionalmente indipendente dai suoi non-discendenti (in questo caso, H, S, P) dati i genitori (in questo caso P).

b) usando la semantica globale di una rete bayesiana abbiamo:

$$\begin{aligned} P(h, s, \neg p, \neg e) &= P(h)P(s|h)P(\neg p|h, s)P(\neg e|\neg p) \\ &= 0.1 \times 0.3 \times 0.1 \times 0.9 = 0.00027 \end{aligned}$$

c) usando l'algoritmo enumerativo:

$$\begin{aligned} P(E|h) &= \alpha \sum_{S=s,P=p} P(h, S, P, E) \\ &= \alpha \sum_{S=s,P=p} P(h)P(S|h)P(P|h, S)P(E|P) \\ &= \alpha P(h) \sum_{S=s} P(S|h) \sum_{P=p} P(P|h, S)P(E|P) \\ &= \alpha 0.1[0.3 \times (0.9 < 0.6, 0.4 > +0.9 < 0.1, 0.9 >) + \\ &\quad 0.7 \times (0.5 < 0.6, 0.4 > +0.5 < 0.1, 0.9 >)] =< 0.41, 0.59 > \end{aligned}$$

Esercizio 3

Siete in vacanza ad Atene, e durante una delle vostre notti brave, in una strada poco illuminata, siete testimoni dell'investimento di un pedone da parte di un taxi, che invece di fermarsi, fugge via. Voi pensate di aver riconosciuto che il colore del taxi fosse blu. Sapendo che ad Atene 1 taxi su 10 è blu ed i restanti sono verdi, e che in condizioni di scarsa illuminazione il blu e il verde si discriminano nel 75% dei casi, calcolare la probabilità che il taxi fosse realmente di colore blu. (Aiuto: differenziare la sentenza "il taxi era blu" dalla sentenza "il taxi sembrava blu").

Soluzione:

Sia B la variabile booleana associata alla sentenza "il taxi era blu" e SB la variabile booleana associata alla sentenza "il taxi sembrava blu".

Il fatto che in condizioni di scarsa illuminazione il blu e il verde si discriminano nel 75% dei casi, ci permette di dire che

$$P(SB|B) = 0.75 \quad P(\neg SB|\neg B) = 0.75$$

Inoltre, il fatto che ad Atene 1 taxi su 10 è blu ed i restanti sono verdi, ci permette di dire che $P(B) = 0.1$.

Usando la regola di Bayes abbiamo:

$$P(B|SB) = \alpha P(SB|B)P(B) = \alpha\ 0.75 \times 0.1 = \alpha\ 0.075$$

$$P(\neg B|SB) = \alpha P(SB|\neg B)P(\neg B) = \alpha 0.25 \times 0.9 = \alpha\ 0.225$$

e quindi, normalizzando,

$$P(B|SB) = \frac{0.075}{0.075 + 0.225} = 0.25 \qquad P(\neg B|SB) = \frac{0.225}{0.075 + 0.225} = 0.75$$