# Inferenza nella Logica del Primo Ordine

## Capitolo 9

# Outline

- ♢ Riduzione della inferenza di primo ordine alla inferenza proposizionale
- ♢ Unificazione
- ♢ Modus Ponens generalizzato
- ♢ Forward e backward chaining
- ♢ Programmazione Logica
- ♢ Risoluzione

# Istanziazione Universale (UI)

Ogni istanziazione di una sentenza quantificata universalmente è conseguenza logica di quest'ultima:

$$\frac{\forall\, v \;\; \alpha}{\textsc{Subst}(\{v/g\}, \alpha)}$$

per ogni variabile $v$ e termine ground $g$

P.e., $\forall\, x \;\; Re(x) \land Ingordo(x) \;\Rightarrow\; Diavolo(x)$ porta a

$$\begin{array}{l}
Re(Giovanni) \land Ingordo(Giovanni) \;\Rightarrow\; Diavolo(Giovanni) \\
Re(Riccardo) \land Ingordo(Riccardo) \;\Rightarrow\; Diavolo(Riccardo) \\
Re(Padre(Giovanni)) \land Ingordo(Padre(Giovanni)) \;\Rightarrow\; Diavolo(Padre(Giovanni)) \\
\quad\vdots
\end{array}$$

# Istanziazione Esistenziale (EI)

Per ogni sentenza $\alpha$, variabile $v$, e simbolo costante $k$
*che non appare in nessuna parte della base di conoscenza*:

$$\frac{\exists\, v \;\; \alpha}{\textsc{Subst}(\{v/k\}, \alpha)}$$

P.e., $\exists\, x \;\; Corona(x) \wedge SullaTesta(x, Giovanni)$ porta a

$$Corona(C_1) \wedge SullaTesta(C_1, Giovanni)$$

a patto che $C_1$ sia un nuovo simbolo di costante, chiamato costante di Skolem

Altro esempio: da $\exists\, x \;\; d(x^y)/dy = x^y$ si ottiene

$$d(e^y)/dy = e^y$$

a patto che $e$ sia un nuovo simbolo di costante

# Istanziazione Esistenziale

UI può essere applicata più volte per *aggiungere* nuove sentenze;
la nuova KB è logicamente equivalente alla vecchia

EI può essere applicata solo una volta per *rimpiazzare* la sentenza esistenziale;
la nuova KB *non* è equivalente alla vecchia,
ma è soddisfacibile sse la vecchia KB era soddisfacibile

# Riduzione alla inferenza proposizionale

Supponiamo che KB contenga solo le seguenti sentenze:

$$\forall x \;\; Re(x) \wedge Ingordo(x) \;\Rightarrow\; Diavolo(x)$$
$$Re(Giovanni)$$
$$Ingordo(Giovanni)$$
$$Fratello(Riccardo, Giovanni)$$

Istanziando la sentenza universale in *tutti i possibili* modi, si ottiene

$$Re(Giovanni) \wedge Ingordo(Giovanni) \;\Rightarrow\; Diavolo(Giovanni)$$
$$Re(Riccardo) \wedge Ingordo(Riccardo) \;\Rightarrow\; Diavolo(Riccardo)$$
$$Re(Giovanni)$$
$$Ingordo(Giovanni)$$
$$Fratello(Riccardo, Giovanni)$$

La nuova KB è proposizionalizzata: i simboli proposizionali sono

$Re(Giovanni),\; Ingordo(Giovanni),\; Diavolo(Giovanni), Re(Riccardo)$ etc.

# Riduzione

Affermazione: una sentenza ground è conseguenza logica della nuova KB sse è conseguenza logica della KB originaria

Affermazione: ogni FOL KB può essere proposizionalizzata in modo da preservarne le conseguenze logiche

Idea: proposizionalizzare sia KB che la query, applicare la risoluzione, restituire il risultato

Problema: con i simboli di funzione, c'è un numero infinito di termini ground,
e.g., $Padre(Padre(Padre(Giovanni)))$

Teorema: Herbrand (1930). Se una sentenza $\alpha$ è conseguenza logica di una FOL KB,
essa è conseguenza logica di un sottoinsieme *finito* della KB proposizionale

Idea: For $n = 0$ to $\infty$ do
creare una KB proposizionale con termini di profondità $n$
controllare se $\alpha$ è conseguenza logica della KB considerata

Problema: funziona solo se $\alpha$ è conseguenza logica, cicla se $\alpha$ non è conseguenza logica

Teorema: Turing (1936), Church (1936), "entailment" in FOL è semidecidible

# Problemi con la proposizionalizzazione

La proposizionalizzazione sembra generare tante sentenze irrilevanti
P.e.,

$$\forall x \;\; Re(x) \land Ingordo(x) \;\Rightarrow\; Diavolo(x)$$
$$Re(Giovanni)$$
$$\forall y \;\; Ingordo(y)$$
$$Fratello(Riccardo, Giovanni)$$

ok per $Diavolo(Giovanni)$, ma la proposizionalizzazione produce tanti fatti come $Ingordo(Riccardo)$ che sono irrilevanti

Con $p$ predicati $k$-ari e $n$ constanti, ci sono $p \cdot n^k$ istanziazioni!

# Unificazione

Si può ottenere l'inferenza immediatamente se possiamo trovare una sostituzione $\theta$ tale che $Re(x)$ e $Ingordo(x)$ corrispondano a $Re(Giovanni)$ e $Ingordo(y)$

$\theta = \{x/Giovanni, y/Giovanni\}$ va bene

$\textsc{Unify}(\alpha, \beta) = \theta$ if $\alpha\theta = \beta\theta$

| $p$ | $q$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(Giovanni, Giovanna)$ | |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, OJ)$ | |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, Madre(y))$ | |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(x, OJ)$ | |

# Unificazione

Si può ottenere l'inferenza immediatamente se possiamo trovare una sostituzione $\theta$ tale che $Re(x)$ e $Ingordo(x)$ corrispondano a $Re(Giovanni)$ e $Ingordo(y)$

$\theta = \{x/Giovanni, y/Giovanni\}$ va bene

$\textsc{Unify}(\alpha, \beta) = \theta$ if $\alpha\theta = \beta\theta$

| $p$ | $q$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(Giovanni, Giovanna)$ | $\{x/Giovanna\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, OJ)$ | |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, Madre(y))$ | |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(x, OJ)$ | |

# Unificazione

Si può ottenere l'inferenza immediatamente se possiamo trovare una sostituzione $\theta$ tale che $Re(x)$ e $Ingordo(x)$ corrispondano a $Re(Giovanni)$ e $Ingordo(y)$

$\theta = \{x/Giovanni, y/Giovanni\}$ va bene

$\textsc{Unify}(\alpha, \beta) = \theta$ if $\alpha\theta = \beta\theta$

| $p$ | $q$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(Giovanni, Giovanna)$ | $\{x/Giovanna\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, OJ)$ | $\{x/OJ, y/Giovanni\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, Madre(y))$ | |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(x, OJ)$ | |

# Unificazione

Si può ottenere l'inferenza immediatamente se possiamo trovare una sostituzione $\theta$ tale che $Re(x)$ e $Ingordo(x)$ corrispondano a $Re(Giovanni)$ e $Ingordo(y)$

$\theta = \{x/Giovanni, y/Giovanni\}$ va bene

$\textsc{Unify}(\alpha, \beta) = \theta$ if $\alpha\theta = \beta\theta$

| $p$ | $q$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(Giovanni, Giovanna)$ | $\{x/Giovanna\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, OJ)$ | $\{x/OJ, y/Giovanni\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, Madre(y))$ | $\{y/Giovanni, x/Madre(Giovanni)\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(x, OJ)$ | |

# Unificazione

Si può ottenere l'inferenza immediatamente se possiamo trovare una sostituzione $\theta$ tale che $Re(x)$ e $Ingordo(x)$ corrispondano a $Re(Giovanni)$ e $Ingordo(y)$

$\theta = \{x/Giovanni, y/Giovanni\}$ va bene

$\textsc{Unify}(\alpha, \beta) = \theta$ if $\alpha\theta = \beta\theta$

| $p$ | $q$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(Giovanni, Giovanna)$ | $\{x/Giovanna\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, OJ)$ | $\{x/OJ, y/Giovanni\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, Madre(y))$ | $\{y/Giovanni, x/Madre(Giovanni)\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(x, OJ)$ | $fallimento$ |

Standardizing apart elimina sovrapposizioni di variabili, p.e., $Conosce(z_{17}, OJ)$

# Unificazione

Si può ottenere l'inferenza immediatamente se possiamo trovare una sostituzione $\theta$ tale che $Re(x)$ e $Ingordo(x)$ corrispondano a $Re(Giovanni)$ e $Ingordo(y)$

$\theta = \{x/Giovanni, y/Giovanni\}$ va bene

$\textsc{Unify}(\alpha, \beta) = \theta$ if $\alpha\theta = \beta\theta$

| $p$ | $q$ | $\theta$ |
|---|---|---|
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(Giovanni, Giovanna)$ | $\{x/Giovanna\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, OJ)$ | $\{x/OJ, y/Giovanni\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(y, Madre(y))$ | $\{y/Giovanni, x/Madre(Giovanni)\}$ |
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(x, OJ)$ | $fallimento$ |

Standardizing apart elimina sovrapposizioni di variabili, p.e., $Conosce(z_{17}, OJ)$

| | | |
|---|---|---|
| $Conosce(Giovanni, x)$ | $Conosce(z_{17}, OJ)$ | $\{z_{17}/Giovanni, x/OJ\}$ |

# Algoritmo di Unificazione

**function** UNIFY($x, y, \theta$) **returns** a substitution to make $x$ and $y$ identical (given $\theta$)
  **inputs**: $x$, a variable, constant, list, or compound
    $y$, a variable, constant, list, or compound
    $\theta$, the substitution built up so far, initially empty

  **if** $\theta$ = failure **then return** failure
  **else if** $x = y$ **then return** $\theta$
  **else if** VARIABLE?($x$) **then return** UNIFY-VAR($x, y, \theta$)
  **else if** VARIABLE?($y$) **then return** UNIFY-VAR($y, x, \theta$)
  **else if** COMPOUND?($x$) **and** COMPOUND?($y$) **then**
    **return** UNIFY(ARGS[$x$], ARGS[$y$], UNIFY(OP[$x$], OP[$y$], $\theta$))
  **else if** LIST?($x$) **and** LIST?($y$) **then**
    **return** UNIFY(REST[$x$], REST[$y$], UNIFY(FIRST[$x$], FIRST[$y$], $\theta$))
  **else return** failure

---

**function** UNIFY-VAR($var, x, \theta$) **returns** a substitution
  **inputs**: $var$, a variable, $x$ any expression, $\theta$ the substitution built up so far

  **if** $\{var/val\} \in \theta$ **then return** UNIFY($val, x, \theta$)
  **else if** $\{x/val\} \in \theta$ **then return** UNIFY($var, val, \theta$)
  **else if** OCCUR-CHECK?($var, x$) **then return** failure
  **else return** add $\{var/x\}$ to $\theta$

# Algoritmo di Unificazione Modificato

```
function UNIFY(x, y, θ) returns a substitution to make x and y identical (given θ)
   inputs: x, a variable, constant, list, or compound
           y, a variable, constant, list, or compound
           θ, the substitution built up so far, initially empty

   if θ = failure then return failure
   else if x = y then return θ
   else if VARIABLE?(x) then return UNIFY-VAR(x, y, θ)
   else if VARIABLE?(y) then return UNIFY-VAR(y, x, θ)
   else if COMPOUND?(x) and COMPOUND?(y) then
        return UNIFY(ARGS[x], ARGS[y], UNIFY(OP[x], OP[y], θ))
   else if LIST?(x) and LIST?(y) then
        return UNIFY(SUBST(θ,REST[x]), SUBST(θ,REST[y]), UNIFY(SUBST(θ,FIRST[x]),
                                                                SUBST(θ,FIRST[y]), θ))
   else return failure
```

---

```
function UNIFY-VAR(var, x, θ) returns a substitution
   inputs: var, a variable, x any expression, θ the substitution built up so far

   if {var/val} ∈ θ then return UNIFY(val, x, θ)
   else if {x/val} ∈ θ then return UNIFY(var, val, θ)
   else if OCCUR-CHECK?(var, x) then return failure
   else return COMPOSE({var/x},θ)
```

# Modus Ponens Generalizzato (GMP)

$$\frac{p_1{}',\ \ p_2{}',\ \ldots,\ p_n{}',\ \ (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q)}{q\theta}$$

dove $p_i{}'\theta = p_i\theta$ per tutte le $i$

$p_1{}'$ è $Re(Giovanni)$ $\quad$ $p_1$ è $Re(x)$
$p_2{}'$ è $Ingordo(y)$ $\quad$ $p_2$ è $Ingordo(x)$
$\theta$ è $\{x/Giovanni, y/Giovanni\}$ $\quad$ $q$ è $Diavolo(x)$
$q\theta$ è $Diavolo(Giovanni)$

GMP usato con KB composto di clausole definite (*esattamente* un letterale positivo)
Si assume che tutte le variabili siano quantificate universalmente

# Correttezza di GMP

Bisogna mostrare che

$$p_1{}', \; \ldots, \; p_n{}', \;\; (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q) \models q\theta$$

dato che $p_i{}'\theta = p_i\theta$ per tutte le $i$

Lemma: per ogni clausola definita $p$, abbiamo $p \models p\theta$ per mezzo di UI

1. $(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q) \models (p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q)\theta = (p_1\theta \wedge \ldots \wedge p_n\theta \Rightarrow q\theta)$
2. $p_1{}', \; \ldots, \; p_n{}' \models p_1{}' \wedge \ldots \wedge p_n{}' \models p_1{}'\theta \wedge \ldots \wedge p_n{}'\theta$
3. da 1 e 2, $q\theta$ segue da Modus Ponens ordinario

# Esempio di base di conoscenza

La legge in America dice che è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili. La nazione Nono, nemico dell'America, possiede alcuni missili, venduti alla nazione dal Colonnello West, che è americano.

Provare che Col. West è un criminale

# Esempio di base di conoscenza

. . . è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

# Esempio di base di conoscenza

. . . è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x, y, z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$$

Nono . . . possiede dei missili, cioè, $\exists\, x\ Owns(Nono, x) \wedge Missile(x)$:

# Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$American(x) \land Weapon(y) \land Sells(x, y, z) \land Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists\, x\ Owns(Nono, x) \land Missile(x)$:

$Owns(Nono, M_1) \land Missile(M_1)$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

# Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x, y, z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists\, x\ Owns(Nono, x) \wedge Missile(x)$:

$Owns(Nono, M_1) \wedge Missile(M_1)$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$\forall\, x\ \ Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \ \Rightarrow\ Sells(West, x, Nono)$

I missili sono armi:

# Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$American(x) \land Weapon(y) \land Sells(x, y, z) \land Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists\, x\ Owns(Nono, x) \land Missile(x)$:

$$Owns(Nono, M_1) \land Missile(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$$\forall\, x\ \ Missile(x) \land Owns(Nono, x)\ \Rightarrow\ Sells(West, x, Nono)$$

I missili sono armi:

$$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$$

Un nemico dell'America è "ostile":

# Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x, y, z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists\, x\ Owns(Nono, x) \wedge Missile(x)$:

$$Owns(Nono, M_1) \wedge Missile(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$$\forall\, x\ \ Missile(x) \wedge Owns(Nono, x)\ \Rightarrow\ Sells(West, x, Nono)$$

I missili sono armi:

$$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$$

Un nemico dell'America è "ostile":

$$Enemy(x, America)\ \Rightarrow\ Hostile(x)$$

West, che è americano ...

# Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x, y, z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists\, x\ Owns(Nono, x) \wedge Missile(x)$:

$Owns(Nono, M_1) \wedge Missile(M_1)$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$\forall\, x\ \ Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \ \Rightarrow\ Sells(West, x, Nono)$

I missili sono armi:

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

Un nemico dell'America è "ostile":

$Enemy(x, America) \ \Rightarrow\ Hostile(x)$

West, che è americano ...

$American(West)$

La nazione Nono, un nemico dell' America ...

# Esempio di base di conoscenza

. . . è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x, y, z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

Nono . . . possiede dei missili, cioè, $\exists\, x\ Owns(Nono, x) \wedge Missile(x)$:

$Owns(Nono, M_1) \wedge Missile(M_1)$

. . . tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$\forall\, x\ \ Missile(x) \wedge Owns(Nono, x)\ \Rightarrow\ Sells(West, x, Nono)$

I missili sono armi:

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

Un nemico dell'America è "ostile":

$Enemy(x, America)\ \Rightarrow\ Hostile(x)$

West, che è americano . . .

$American(West)$

La nazione Nono, un nemico dell' America . . .

$Enemy(Nono, America)$

# Algoritmo di Forward chaining

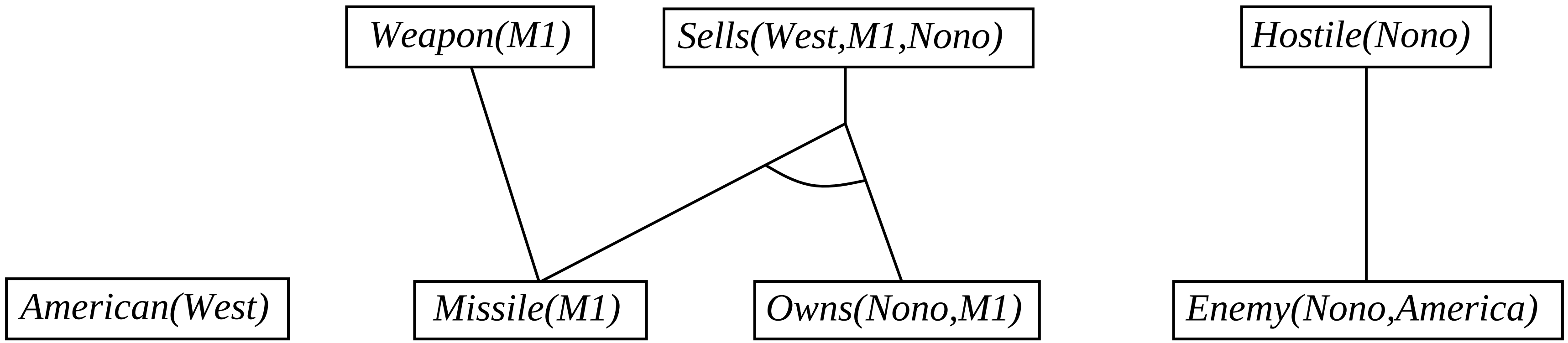
**function** FOL-FC-ASK($KB, \alpha$) **returns** a substitution or *false*

```
repeat until new is empty
    new ← { }
    for each sentence r in KB do
        ( p1 ∧ ... ∧ pn ⇒ q) ← STANDARDIZE-APART(r)
        for each θ such that (p1 ∧ ... ∧ pn)θ = (p'1 ∧ ... ∧ p'n)θ
                    for some p'1, ..., p'n in KB
            q' ← SUBST(θ, q)
            if q' is not a renaming of a sentence already in KB or new then do
                add q' to new
                φ ← UNIFY(q', α)
                if φ is not fail then return φ
    add new to KB
return false
```

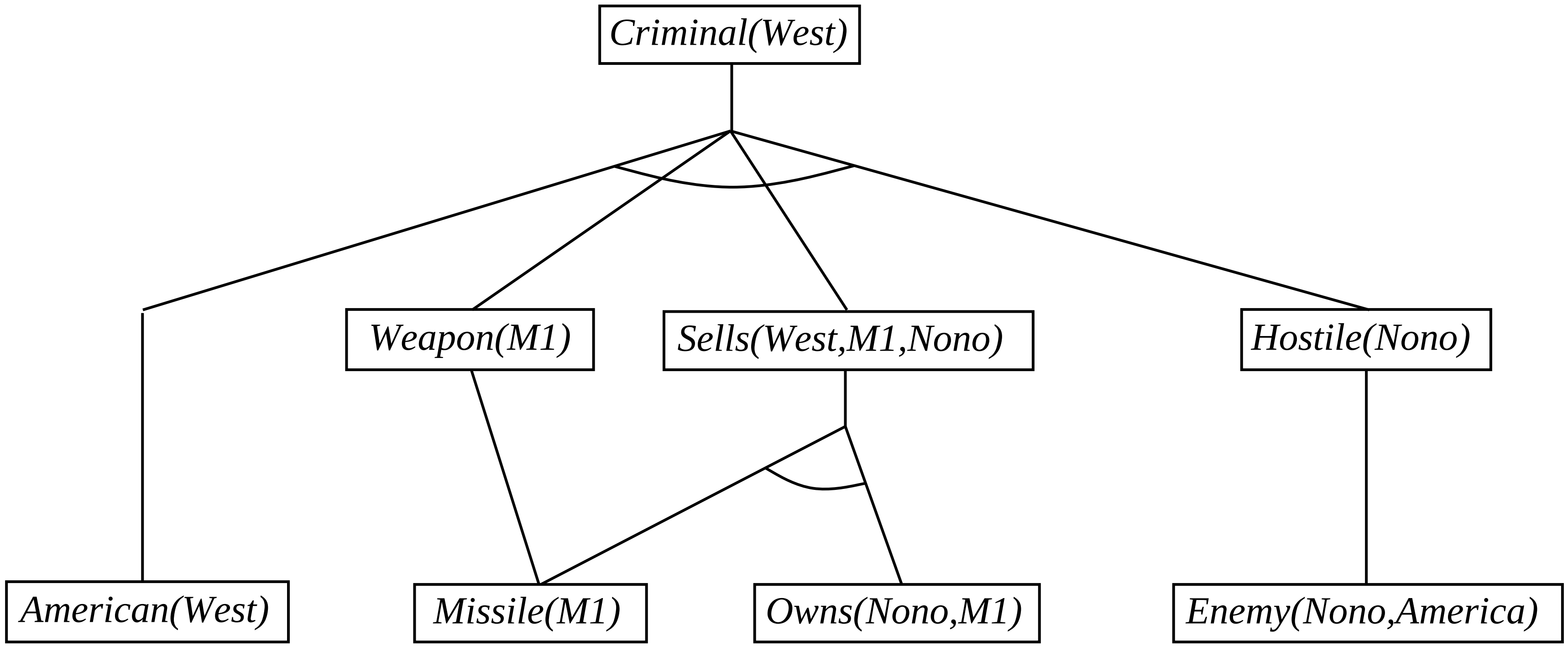
# Prova tramite Forward chaining

*American(West)* *Missile(M1)* *Owns(Nono,M1)* *Enemy(Nono,America)*

# Prova tramite Forward chaining



# Prova tramite Forward chaining



# Proprietà di Forward chaining

Corretta e completa per clausole definite di primo ordine
(prova simile alla prova proposizionale)

Datalog $=$ clausole definite del primo ordine $+$ *nessuna funzione*
FC termina per Datalog in un numero di iterazioni polinomiale: al più $p \cdot n^k$ letterali

In generale può non terminare se $\alpha$ non è conseguenza logica

Ciò è inevitabile: entailment con clausole definite è semidecidibile

# Efficienza di Forward chaining

Semplice osservazione: non c'è bisogno di "match-are" una regola alla iterazione $k$ se una premessa non è stata aggiunta alla iterazione $k-1$
$\Rightarrow$ "match-are" ogni regola le cui premesse contengono un letterale appena aggiunto

Il "matching" è costoso

Indicizzazione della Base di Dati permette il recupero di fatti conosciuti in $O(1)$
p.e., la query $Missile(x)$ recupera $Missile(M_1)$

Matching di premesse congiuntive rispetto a fatti conosciuti è NP-hard

Forward chaining è largamente utilizzato in basi di dati deduttive

# Algoritmo Backward chaining

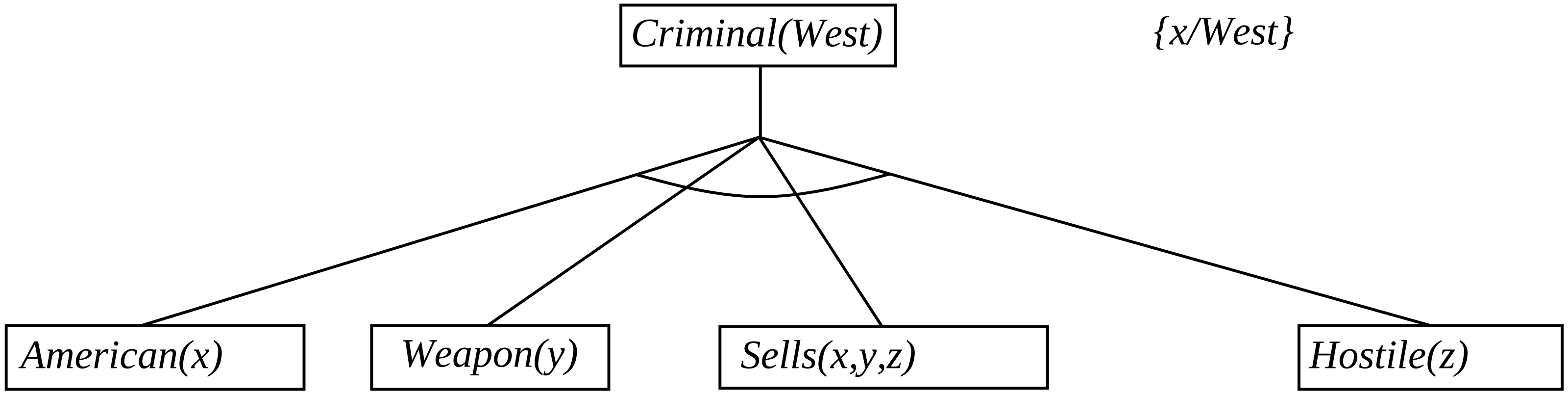
**function** FOL-BC-ASK($KB$, goals, $\theta$) **returns** a set of substitutions
  **inputs**: $KB$, a knowledge base
    $goals$, a list of conjuncts forming a query
    $\theta$, the current substitution, initially the empty substitution $\{\,\}$
  **local variables**: $ans$, a set of substitutions, initially empty

  **if** $goals$ is empty **then return** $\{\theta\}$
  $q' \leftarrow$ SUBST($\theta$, FIRST($goals$))
  **for each** $r$ **in** $KB$ where STANDARDIZE-APART($r$) $= (\, p_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; p_n \;\Rightarrow\; q)$
    and $\theta' \leftarrow$ UNIFY($q$, $q'$) succeeds
   $ans \leftarrow$ FOL-BC-ASK($KB$, $[p_1, \ldots, p_n | \text{REST}(goals)]$, COMPOSE($\theta'$, $\theta$)) $\cup$ $ans$
  **return** $ans$

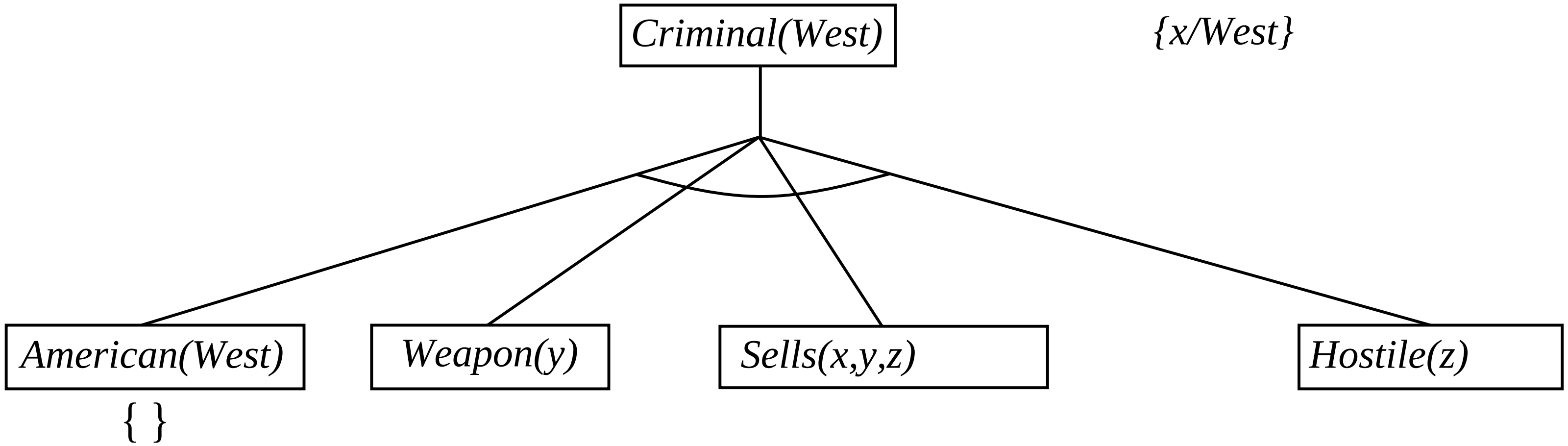
# Esempio Backward chaining

$\boxed{Criminal(West)}$

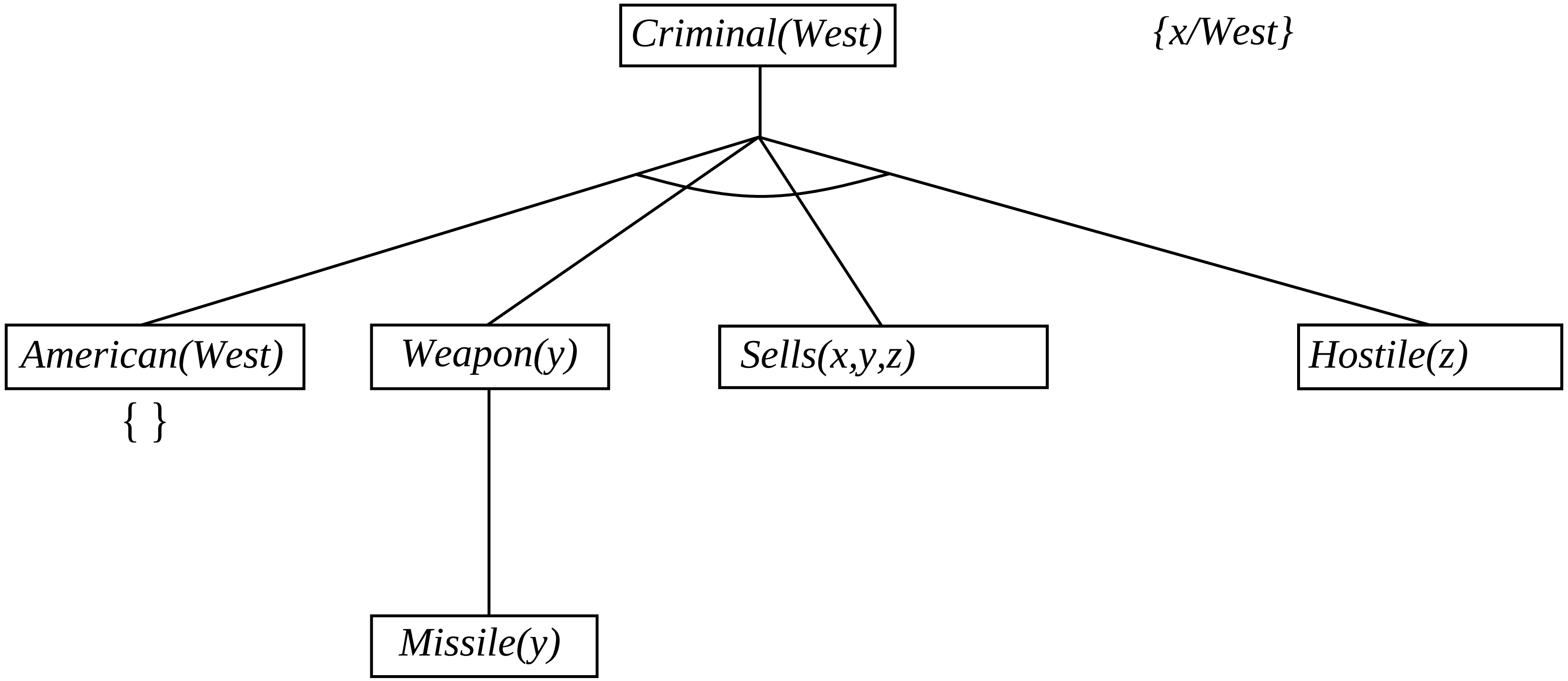
# Esempio Backward chaining



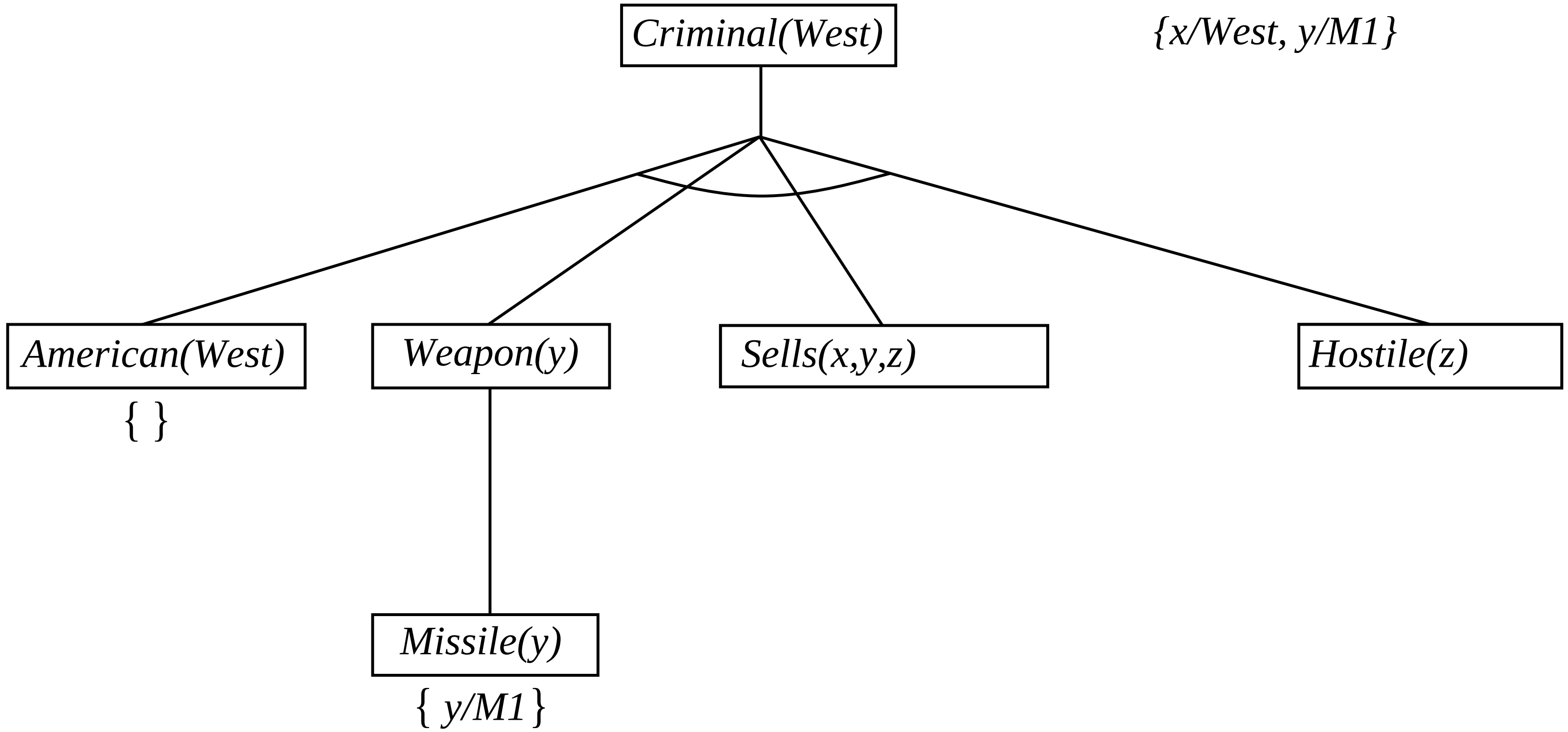
# Esempio Backward chaining



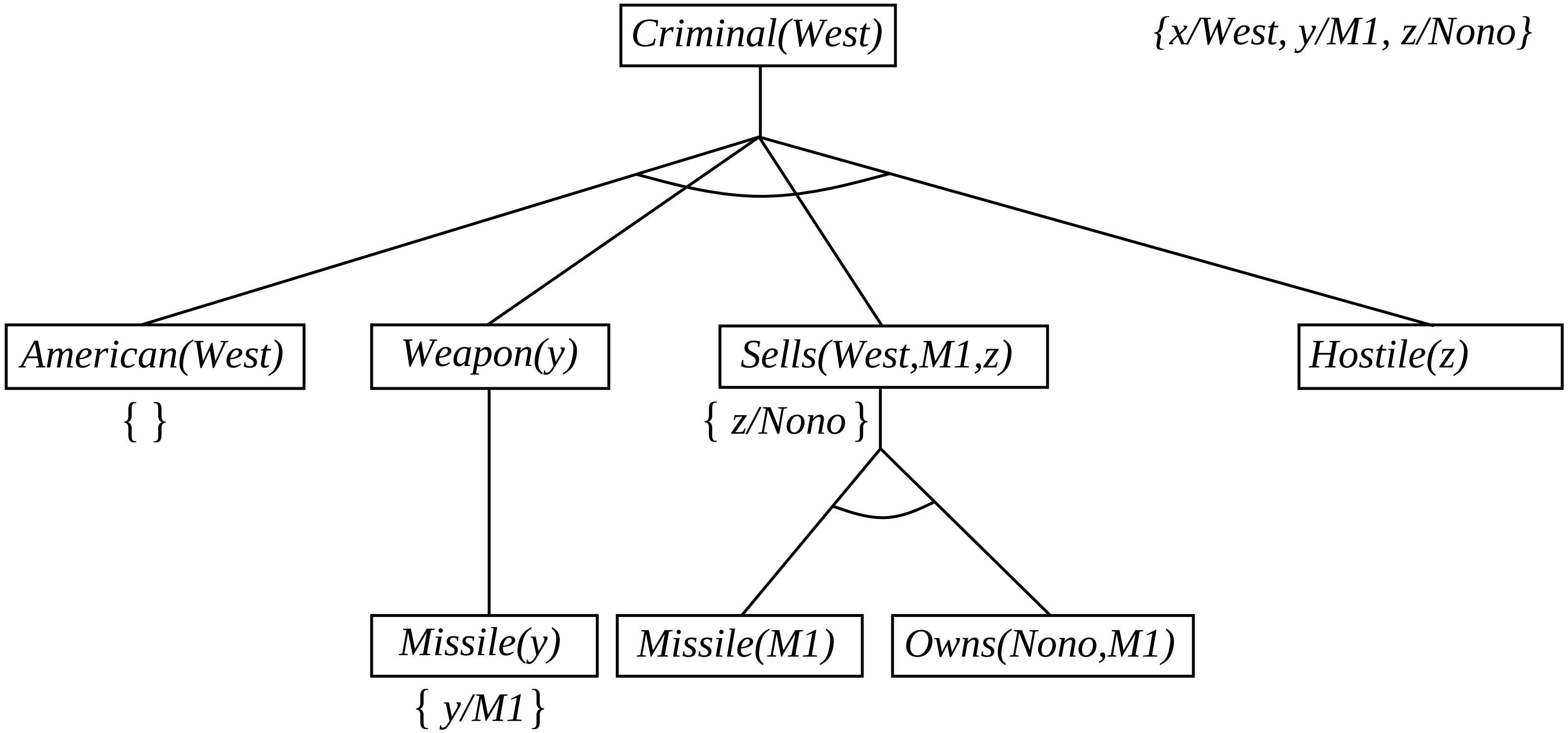
# Esempio Backward chaining



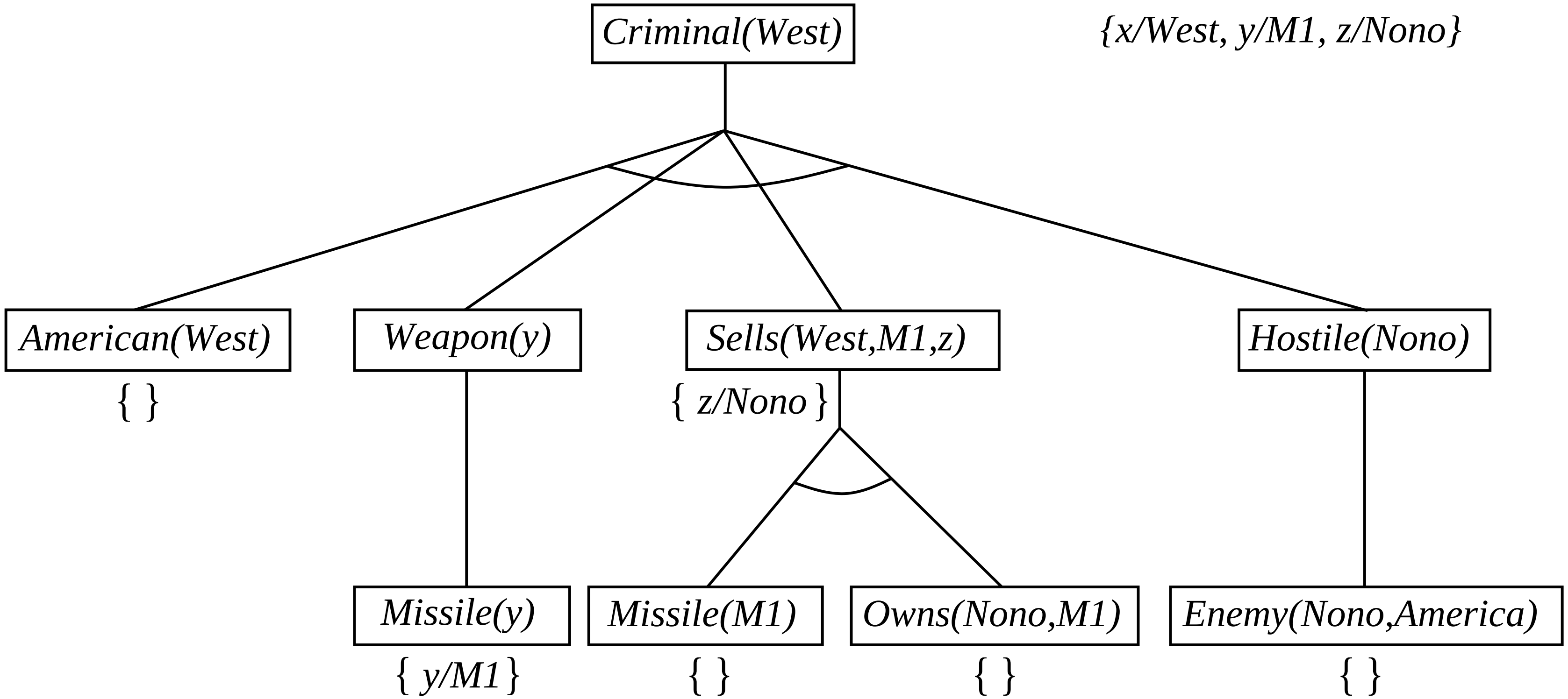
# Esempio Backward chaining



# Esempio Backward chaining



# Esempio Backward chaining



# Proprietà di backward chaining

Complessità in spazio lineare con la dimensione della prova

Incompleta a causa di cicli infiniti
$\Rightarrow$ bisogna controllare il goal corrente rispetto ad ogni goal sulla pila che implementa la ricerca in profondità

Inefficiente a causa di sottogoal ripetuti (sia successo che fallimento)
$\Rightarrow$ bisogna usare una cache che contiene i risultati già calcolati (spazio aggiuntivo!)

Largamente utilizzato (senza i miglioramenti!) per la programmazione logica

# Programmazione Logica: Prolog

Base: backward chaining con clausole Horn + altro

Tecniche di compilazione ⇒ 60 milioni di LIPS

Programma = insieme di clausole = `testa :- letterale`$_1$`, ... letterale`$_n$`.`

```
criminal(X) :- american(X), weapon(Y), sells(X,Y,Z), hostile(Z).
```

Unificazione efficiente tramite open coding
Recupero efficiente di clausole "attivabili" per mezzo di direct linking
Depth-first, left-to-right backward chaining
Predicati built-in per l'aritmetica etc., e.g., `X is Y*Z+3`
Assunzione del mondo chiuso (Closed-world assumption) ("negazione come fallimento")

p.e., dato `vivo(X) :- not morto(X).`
`vivo(joe)` ha successo se `morto(joe)` fallisce

# Esempi di Prolog

Ricerca depth-first da uno stato iniziale `X`:

```
dfs(X) :- goal(X).
dfs(X) :- successor(X,S),dfs(S).
```

Append di due liste:

```
append([],Y,Y).
append([X|L],Y,[X|Z]) :- append(L,Y,Z).

query:    append(A,B,[1,2]) ?
risposte: A=[]    B=[1,2]
          A=[1]   B=[2]
          A=[1,2] B=[]
```

# Risoluzione: breve sommario

Versione completa del primo ordine:

$$\frac{\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_k, \qquad m_1 \vee \cdots \vee m_n}{(\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_{i-1} \vee \ell_{i+1} \vee \cdots \vee \ell_k \vee m_1 \vee \cdots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \cdots \vee m_n)\theta}$$

dove $\textsc{Unify}(\ell_i, \neg m_j) = \theta$.

Per esempio,

$$\frac{\begin{array}{l}\neg Rich(x) \vee Unhappy(x) \\ Rich(Ken)\end{array}}{Unhappy(Ken)}$$

con $\theta = \{x/Ken\}$

Applica passi di risoluzione a $CNF(KB \wedge \neg\alpha)$; completo per FOL

# Conversione a CNF

Ognuno che ama tutti gli animali è amato da qualcuno:

$$\forall x\ \ [\forall y\ \ (Animal(y)\ \Rightarrow\ Loves(x,y))]\ \Rightarrow\ [\exists y\ \ Loves(y,x)]$$

1. Eliminare doppie e singole implicazioni

$$\forall x\ \ [\neg\forall y\ \ (\neg Animal(y) \lor Loves(x,y))] \lor [\exists y\ \ Loves(y,x)]$$

2. Spostare $\neg$ all'interno: $\neg\forall x, p\ \ \equiv \exists x\ \ \neg p$, $\ \ \neg\exists x, p\ \ \equiv \forall x\ \ \neg p$:

$$\forall x\ \ [\exists y\ \ \neg(\neg Animal(y) \lor Loves(x,y))] \lor [\exists y\ \ Loves(y,x)]$$
$$\forall x\ \ [\exists y\ \ \neg\neg Animal(y) \land \neg Loves(x,y)] \lor [\exists y\ \ Loves(y,x)]$$
$$\forall x\ \ [\exists y\ \ Animal(y) \land \neg Loves(x,y)] \lor [\exists y\ \ Loves(y,x)]$$

# Conversione a CNF

3. Standardizzare variabili: ogni quantificatore deve usarne una differente

$$\forall x \;\; [\exists y \;\; Animal(y) \land \neg Loves(x,y)] \lor [\exists z \;\; Loves(z,x)]$$

4. Skolemizzare:

   ogni variabile esistenziale è rimpiazzata da una funzione di Skolem applicata a tutte quelle variabili quantificate universalmente nel cui scope compare il quantificatore esistenziale:

$$\forall x \;\; [Animal(F(x)) \land \neg Loves(x, F(x))] \lor Loves(G(x), x)$$

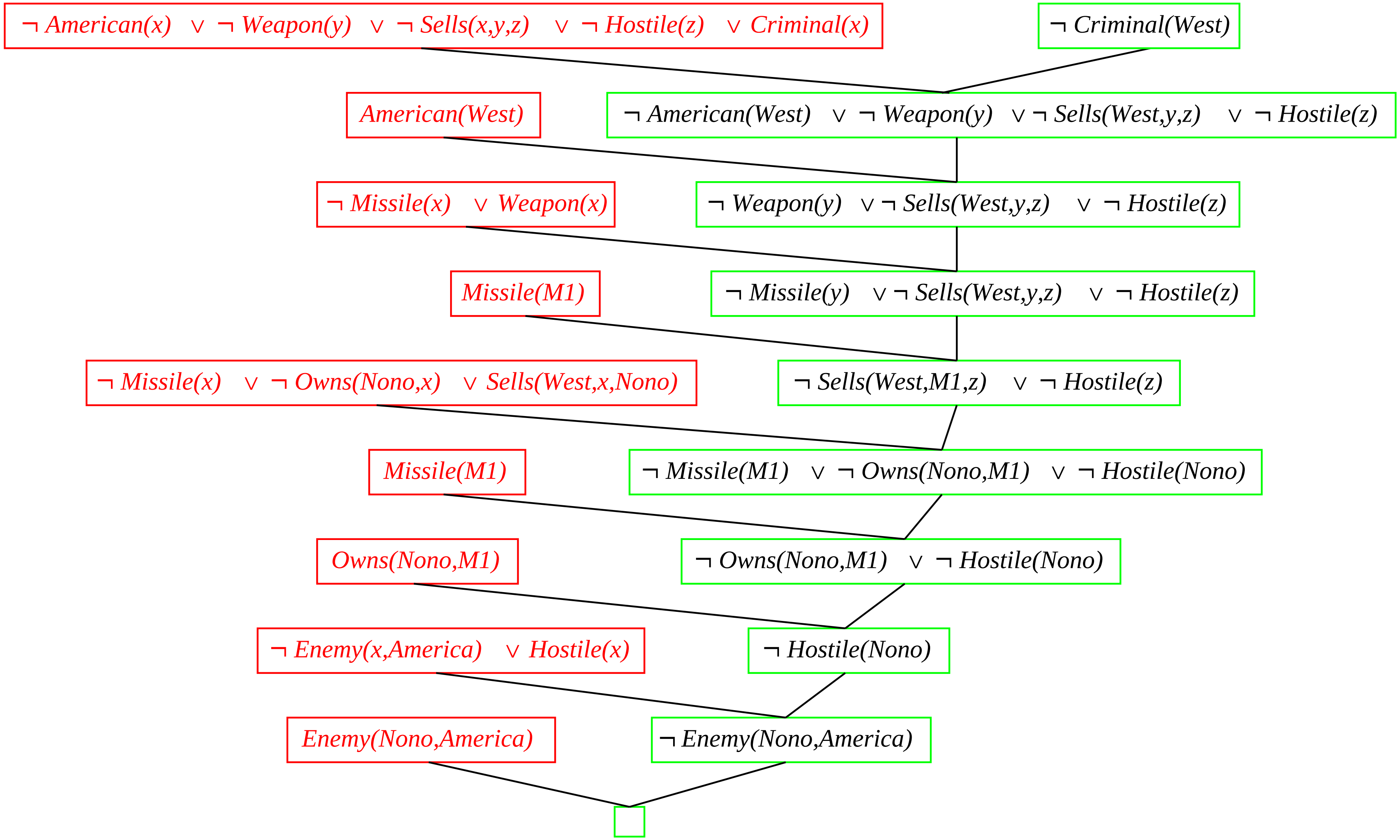
5. Rimuovere i quantificatori universali:

$$[Animal(F(x)) \land \neg Loves(x, F(x))] \lor Loves(G(x), x)$$

6. Distribuire $\land$ su $\lor$:

$$[Animal(F(x)) \lor Loves(G(x), x)] \land [\neg Loves(x, F(x)) \lor Loves(G(x), x)]$$

# Prova di risoluzione per clausole definite



# Strategie di risoluzione

◇ Unit Clause

Si preferisce effettuare la risoluzione con una delle sentenze costituita da un singolo letterale (clausola unitaria)

◇ Unit Resolution

Forma ristretta di risoluzione in cui ogni passo di risoluzione deve coinvolgere una clausola unitaria (incompleta in generale, completa per clausole di Horn)

◇ Set of Support

Basata sull'insieme di supporto da cui si preleva una delle sentenze e dove si pone il risolvente. Esempio di insieme di supporto: il goal (e tutti i risolventi derivati da esso)

◇ Input Resolution

Combina una sentenza in input (KB e Query) con il risolvente corrente. Tipica struttura a spina di pesce.

◇ Linear Resolution

Come Input Resolution, ma ammette anche la combinazione del risolvente corrente con suoi avi.

◇ Subsumption

Elimina tutte le sentenze che sono “subsumed” (più specifiche di altre). Es. $P(A)$ e $P(A) \vee P(B)$ sono più specifiche di $P(x)$.

# Uguaglianza

Fino ad ora l'uguaglianza ($=$) non è stata trattata.

Esistono fondamentalmente 3 approcci diversi:

1. Assiomatizzazione
   Idea base: si aggiungono assiomi che descrivono le proprietà dell'uguaglianza ed assiomi opportuni per ogni predicato e funzione.

2. Aggiunta di una nuova regola di inferenza (p.e., Demodulation, Paramodulation)
   Idea base: se $x = y$ e $UNIFY(x, z) = \theta$,
   rimpiazza $z$ con $SUBST(\theta, y)$.

3. Estensione dell'algoritmo di unificazione
   Idea base: unifica termini equivalenti,
   p.e. $1 + 2$ e $2 + 1$.

# Riassunto

Inferenza in FOL

♢ Proposizionalizzazione ed uso di unificazione per evitare la istanziazione di variabili coinvolte in una prova.

♢ Modus Ponens Generalizzato (GMP) usa l'unificazione e permette l'applicazione di forward e backward chaining su clausole definite.

♢ GMP è completo per clausole definite, anche se determinare le conseguenze logiche è un problema semidecidibile. Per Datalog (no funzioni e clausole definite) il problema è decidibile.

♢ Forward chaining è completo e polinomiale per Datalog.

♢ Backward chaining è usato in Programmazione Logica (p.e., Prolog) e rinforzato con opportune tecniche di compilazione.

♢ Risoluzione generalizzata è completa per KB in forma normale congiuntiva (CNF). Se però si usa il principio di induzione $\Rightarrow$ non completa.