Soluzione esercizio sul mondo dei Wumpus tramite Risoluzione

Si vuole mostrare che: KB $\wedge$ osservazioni |= ($W_{13} \wedge P_{22}$)
Utilizzeremo la Risoluzione, che lo prova per contraddizione, ovvero prova che (KB $\wedge$ osservazioni) $\wedge \neg$ ($W_{13} \wedge P_{22}$) è insoddisfacibile.
Le osservazioni/percezioni sono:

$(\neg P_{11}) \wedge (\neg W_{11}) \wedge (\neg B_{11}) \wedge (\neg S_{11}) \wedge$
$(\neg P_{12}) \wedge (\neg W_{12}) \wedge (B_{12}) \wedge (S_{12}) \wedge$
$(\neg P_{21}) \wedge (\neg W_{21}) \wedge (B_{21}) \wedge (\neg S_{21})$

e si trovano già in forma normale congiuntiva
Per usare la Risoluzione è necessario che anche le regole in KB siano in CNF:

$(\neg B_{ij} \vee P_{(i-1)\,j} \vee P_{(i+1)\,j} \vee P_{i\,(j-1)} \vee P_{i\,(j+1)}) \wedge$
$(B_{ij} \vee \neg P_{(i-1)\,j}) \wedge (B_{ij} \vee \neg P_{(i+1)\,j}) \wedge (B_{ij} \vee \neg P_{i\,(j-1)}) \wedge (B_{ij} \vee \neg P_{i\,(j+1)})$
$(\neg S_{ij} \vee W_{(i-1)\,j} \vee W_{(i+1)\,j} \vee W_{i\,(j-1)} \vee W_{i\,(j+1)}) \wedge$
$(S_{ij} \vee \neg W_{(i-1)\,j}) \wedge (S_{ij} \vee \neg W_{(i+1)\,j}) \wedge (S_{ij} \vee \neg W_{i\,(j-1)}) \wedge (S_{ij} \vee \neg W_{i\,(j+1)})$
$\neg W_{ij} \vee \neg P_{ij}$

ed è necessario che anche $\neg$ ($W_{13} \wedge P_{22}$) sia in CNF:

$\neg W_{13} \vee \neg P_{22}$

Possiamo applicare le regole della KB all'esplorazione che l'agente ha fatto, ottenendo le seguenti congiunzioni di clausole:

$(\neg B_{12} \vee P_{22} \vee P_{11} \vee P_{13}) \wedge (B_{12} \vee \neg P_{22}) \wedge (B_{12} \vee \neg P_{11}) \wedge (B_{12} \vee \neg P_{13})$
$(\neg B_{21} \vee P_{11} \vee P_{31} \vee P_{22}) \wedge (B_{21} \vee \neg P_{11}) \wedge (B_{21} \vee \neg P_{31}) \wedge (B_{21} \vee \neg P_{22})$
$(\neg S_{12} \vee W_{22} \vee W_{11} \vee W_{13}) \wedge (S_{12} \vee \neg W_{22}) \wedge (S_{12} \vee \neg W_{11}) \wedge (S_{12} \vee \neg W_{13})$

Inoltre, utilizzando la terza regola otteniamo:

$(\neg W_{13} \vee \neg P_{13}) \wedge (\neg W_{22} \vee \neg P_{22}) \wedge (\neg W_{31} \vee \neg P_{31})$

In sintesi, l'insieme delle clausole che ci interessa è:

$(\neg P_{11}) \wedge (\neg W_{11}) \wedge (\neg B_{11}) \wedge (\neg S_{11}) \wedge$
$(\neg P_{12}) \wedge (\neg W_{12}) \wedge (B_{12}) \wedge (S_{12}) \wedge$
$(\neg P_{21}) \wedge (\neg W_{21}) \wedge (B_{21}) \wedge (\neg S_{21}) \wedge$
$(\neg B_{12} \vee P_{22} \vee P_{11} \vee P_{13}) \wedge (B_{12} \vee \neg P_{22}) \wedge (B_{12} \vee \neg P_{11}) \wedge (B_{12} \vee \neg P_{13}) \wedge$
$(\neg B_{21} \vee P_{11} \vee P_{31} \vee P_{22}) \wedge (B_{21} \vee \neg P_{11}) \wedge (B_{21} \vee \neg P_{31}) \wedge (B_{21} \vee \neg P_{22}) \wedge$
$(\neg S_{12} \vee W_{22} \vee W_{11} \vee W_{13}) \wedge (S_{12} \vee \neg W_{22}) \wedge (S_{12} \vee \neg W_{11}) \wedge (S_{12} \vee \neg W_{13}) \wedge$
$(\neg W_{13} \vee \neg P_{13}) \wedge (\neg W_{22} \vee \neg P_{22}) \wedge (\neg W_{31} \vee \neg P_{31})$

Per ottenere facilmente la clausola vuota abbiamo bisogno anche della clausola

$(S_{21} \vee \neg W_{22})$

che si ottiene dalla "regola"

$(\neg S_{21} \vee W_{22} \vee W_{11} \vee W_{31}) \wedge (S_{21} \vee \neg W_{22}) \wedge (S_{21} \vee \neg W_{11}) \wedge (S_{21} \vee \neg W_{31})$
Mostriamo ora che attraverso una sequenza di passi di risoluzione otteniamo la clausola vuota. Deriviamo prima ($\neg W_{13}$):

$(\neg B_{12} \vee P_{22} \vee P_{11} \vee P_{13})$ $\qquad$ $(\neg P_{11})$

$$\dfrac{(\neg B_{12} \lor P_{22} \lor P_{13}) \qquad (B_{12})}{(P_{13} \lor P_{22})}$$

$$\dfrac{(P_{13} \lor P_{22}) \qquad (\neg W_{13} \lor \neg P_{13})}{(\neg W_{13} \lor P_{22})}$$

$$\dfrac{(\neg W_{13} \lor P_{22}) \qquad (\neg W_{13} \lor \neg P_{22})}{(\neg W_{13})}$$

e poi (W_{13}) :

$$\dfrac{(\neg S_{12} \lor W_{22} \lor W_{11} \lor W_{13}) \qquad (\neg W_{11})}{(\neg S_{12} \lor W_{22} \lor W_{13})}$$

$$\dfrac{(\neg S_{12} \lor W_{22} \lor W_{13}) \qquad (S_{12})}{(W_{13} \lor W_{22})}$$

$$\dfrac{(W_{13} \lor W_{22}) \qquad (S_{21} \lor \neg W_{22})}{(W_{13} \lor S_{21})}$$

$$\dfrac{(W_{13} \lor S_{21}) \qquad (\neg S_{21})}{(W_{13})}$$

e quindi:

$$\dfrac{(W_{13}) \qquad (\neg W_{13})}{\square}$$