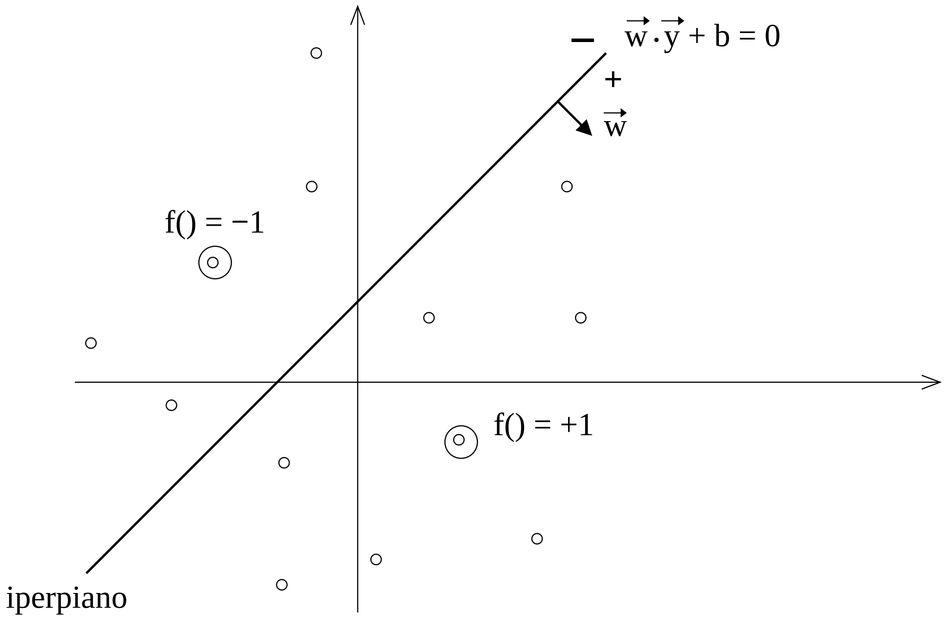
Spazio delle Ipotesi: Esempio 1

Iperpiani in $\mathbb{R}^2$

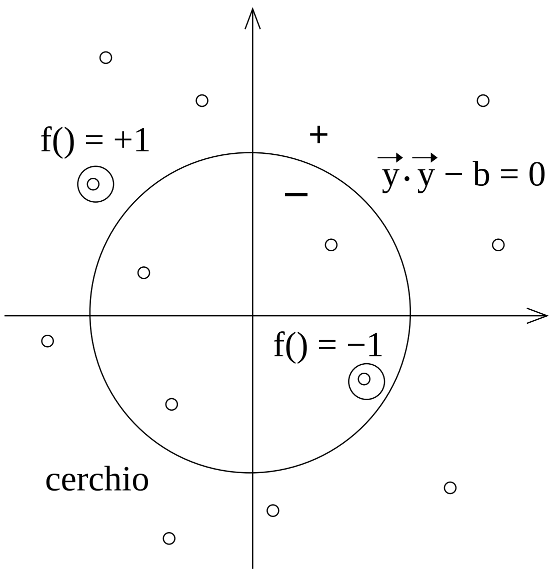
- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ punti nel piano: $X = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ dicotomie indotte da iperpiani in $\mathbb{R}^2$:
  $\mathcal{H} = \{f_{(\vec{w},b)}(\vec{y}) | f_{(\vec{w},b)}(\vec{y}) = sign(\vec{w} \cdot \vec{y} + b), \vec{w} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}\}$



Spazio delle Ipotesi: Esempio 2

Dischi in $\mathbb{R}^2$

- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ punti nel piano: $X = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ dicotomie indotte da dischi in $\mathbb{R}^2$ centrati nell'origine:
  $\mathcal{H} = \{f_b(\vec{y}) | f_b(\vec{y}) = sign((\vec{y} \cdot \vec{y})^{\frac{1}{2}} - b), b \in \mathbb{R}\}$



Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Spazio delle Istanze $\rightarrow$ stringhe di m bit: $X = \{s|s \in \{0,1\}^m\}$
- Spazio delle Ipotesi $\rightarrow$ tutte le sentenze logiche che riguardano i letterali positivi $l_1, \ldots, l_m$ (l_1 è vero se il primo bit vale 1, l_2 è vero se il secondo bit vale 1, etc.) e che contengono solo l'operatore $\wedge$ (**and**):

$$\mathcal{H} = \{f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s)|f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) \equiv l_{i_1} \wedge l_{i_2} \wedge \cdots \wedge l_{i_j}, \{i_1,\ldots,i_j\} \subseteq \{1,\ldots,m\}\}$$

Es. $m = 3$, $X = \{0,1\}^3$

Esempi di istanze $\rightarrow$ $s1 = 101$, $s2 = 001$, $s3 = 100$, $s4 = 111$

Esempi di ipotesi $\rightarrow$ $h_1 \equiv l_2$, $h_2 \equiv l_1 \wedge l_2$, $h_3 \equiv true$, $h_4 \equiv l_1 \wedge l_3$, $h_5 \equiv l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$

Notare che: h_1, h_2, e h_5 sono false per $s1$, $s2$ e $s3$ e vere per $s4$; h_3 è vera per ogni istanza; h_4 è vera per $s1$ e $s4$ ma falsa per $s2$ e $s3$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Domanda 1: quante e quali sono le ipotesi distinte nel caso $m = 3$?
- Domanda 2: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Domanda 1: quante e quali sono le ipotesi distinte nel caso $m = 3$?
  - Ris.(quali): $true, l_1, l_2, l_3, l_1 \wedge l_2, l_1 \wedge l_3, l_2 \wedge l_3, l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$
  - Ris.(quante): 8
- Domanda 2: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Domanda 1: quante e quali sono le ipotesi distinte nel caso $m = 3$?
  - Ris.(quali): $true, l_1, l_2, l_3, l_1 \wedge l_2, l_1 \wedge l_3, l_2 \wedge l_3, l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$
  - Ris.(quante): 8
- Domanda 2: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?
  - Ris.: 2^m, infatti per ogni possibile bit della stringa in ingresso il corrispondente letterale può apparire o meno nella formula logica, quindi:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{m \text{ volte}} = 2^m$$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 4

Congiunzione di m letterali

- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ stringhe di m bit: $X = \{s | s \in \{0,1\}^m\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ tutte le sentenze logiche che riguardano i letterali $l_1, \ldots, l_m$ (anche in forma negata, $\neg l_i$) e che contengono solo l'operatore $\wedge$ (**and**):

$$\mathcal{H} = \{f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) | f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) \equiv L_{i_1} \wedge L_{i_2} \wedge \cdots \wedge L_{i_j}, \\ \text{dove } L_{i_k} = l_{i_k} \text{ oppure } \neg l_{i_k}, \{i_1, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, \ldots, 2m\}\}$$

Notare che se in una formula un letterale compare sia affermato che negato, allora la formula ha sempre valore di verità $false$ (formula non soddisfacibile)

Quindi, tutte le formule che contengono almeno un letterale sia affermato che negato sono equivalenti alla funzione che vale sempre $false$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 4

Congiunzione di m letterali

Es. $m = 3$, $X = \{0, 1\}^3$

Esempi di istanze $\rightarrow s1 = 101$, $s2 = 001$, $s3 = 100$, $s4 = 111$, $s5 = 000$

Esempi di ipotesi $\rightarrow h_1 \equiv \neg l_2$, $h_2 \equiv \neg l_1 \wedge l_3$, $h_3 \equiv true$, $h_4 \equiv \neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge \neg l_3$

Notare che:

- h_1, è falsa per $s4$, e vera per $s1$, $s2$, $s3$ e $s5$;
- h_2 è falsa per $s1$, $s3$, $s4$ e $s5$ e vera per $s2$;
- h_3 è vera per ogni istanza;
- h_4 è falsa per $s1$, $s2$, $s3$, $s4$ e vera per $s5$;

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 4

Congiunzione di m letterali

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Risposta: considerando che tutte le formule non soddisfacibili sono equivalenti alla funzione sempre falsa, allora non consideriamo formule dove compare un letterale sia affermato che negato.

Quindi, per ogni possibile bit della stringa in ingresso il corrispondente letterale può non apparire nella formula logica o, se appare, è affermato o negato:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}_{m \text{ volte}} = 3^m$$

E considerando la funzione sempre falsa si ha $3^m + 1$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 5

Lookup Table

- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ stringhe di m bit: $X = \{s|s \in \{0,1\}^m\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ tutte le possibili tabelle di verità che mappano istanze di ingresso ai valori $true$ e $false$: $\mathcal{H} = \{f(s)|f : X \rightarrow \{true, false\}\}$

  Es.

l_1	l_2	$\cdots$	l_m	$f(s)$
0	0	$\cdots$	0	1
0	0	$\cdots$	1	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	1	$\cdots$	0	0
0	1	$\cdots$	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	0	$\cdots$	0	1
1	0	$\cdots$	1	1
1	1	$\cdots$	0	0
1	1	$\cdots$	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 5

Congiunzione di m letterali

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 5

Congiunzione di m letterali

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Risposta: tramite una tabella è possibile realizzare una qualunque funzione dallo spazio delle istanze nei valori $true$ e $false$.

Il numero di possibili istanze è:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{m \text{ volte}} = 2^m$$

e quindi il numero di possibili funzioni realizzabili è: 2^{2^m}

Osservazioni su Esempi 3, 4 e 5

Osservare che negli esempi 3, 4 e 5 lo spazio delle istanze è sempre lo stesso.
Gli spazi delle ipotesi invece (indichiamo con $\mathcal{H}_3$ quello relativo all'esempio 3, etc.) sono diversi e per ogni m fissato vale la seguente relazione: $\boxed{\mathcal{H}_3 \subset \mathcal{H}_4 \subset \mathcal{H}_5}$
Per esempio, dato $m = 3$

- la funzione booleana $f(s)$ che vale vero solo per le istanze 001 e 011 è contenuta in $\mathcal{H}_4$, infatti $f(s) \equiv \neg l_1 \wedge l_3 \in \mathcal{H}_4$, e in $\mathcal{H}_5$(è facile scrivere una tabella per cui la colonna relativa all'output della funzione è 1 solo in corrispondenza delle istanze 001 e 011), ma non in $\mathcal{H}_3$ perché non esiste la possibilità di descrivere $f(s)$ usando una congiunzione di letterali positivi.

- la funzione booleana $f(s)$ che vale vero solo per le istanze 001, 011 e 100 è contenuta in $\mathcal{H}_5$ (si può procedere come sopra), ma non in $\mathcal{H}_3$ e $\mathcal{H}_4$, perché non esiste la possibilità di descrivere $f(s)$ usando una congiunzione di letterali (positivi).

In particolare $\mathcal{H}_5$ coincide con l'insieme di tutte le funzioni booleane su X.

Principali Paradigmi di Apprendimento: Richiamo

Apprendimento Supervisionato:

- dato in insieme di esempi pre-classificati, $Tr = \{(x^{(i)}, f(x^{(i)}))\}$, apprendere una descrizione generale che incapsula l'informazione contenuta negli esempi (regole valide su tutto il dominio di ingresso)
- tale descrizione deve poter essere usata in modo predittivo (dato un nuovo ingresso $\tilde{x}$ predire l'output associato $f(\tilde{x})$)
- si assume che un esperto (o maestro) ci fornisca la supervisone (cioè i valori della $f()$ per le istanze x dell'insieme di apprendimento)

Dati

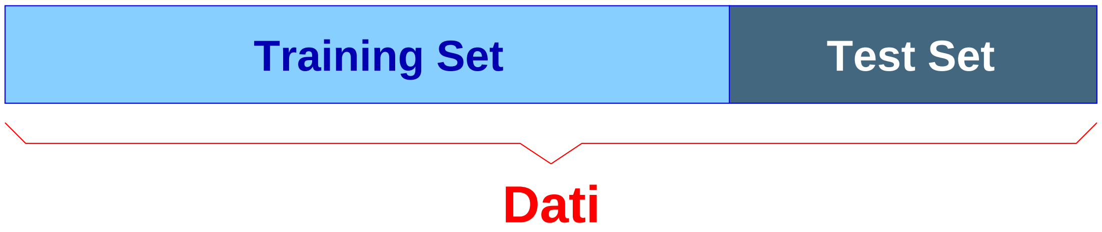
Consideriamo il paradigma di Apprendimento Supervisonato

Dati a nostra disposizione (off-line)

$$\text{Dati} = \{(x^{(1)}, f(x^{(1)})), \ldots, (x^{(N)}, f(x^{(N)}))\}$$

Suddivisione tipica $(N = N_{tr} + N_{ts})$:

- $\boxed{\text{Training Set} = \{(x^{(1)}, f(x^{(1)})), \ldots, (x^{(N_{tr})}, f(x^{(N_{tr})}))\}}$
  usato direttamente dall'algoritmo di apprendimento;
- $\boxed{\text{Test Set} = \{(x^{(1)}, f(x^{(1)})), \ldots, (x^{(N_{ts})}, f(x^{(N_{ts})}))\}}$
  usato alla fine dell'apprendimento per stimare la bontà della soluzione.



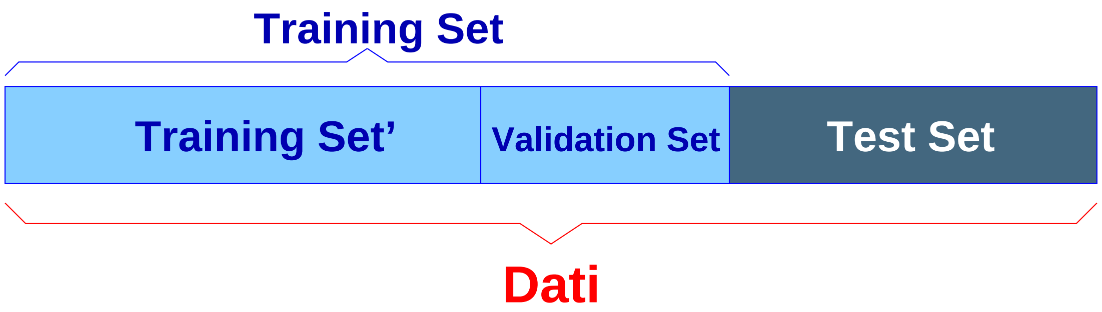
Dati (cont.)

Se N abbastanza grande il Training Set è ulteriormente suddiviso in due sottoinsiemi $(N_{tr} = N_{\widehat{tr}} + N_{val})$:

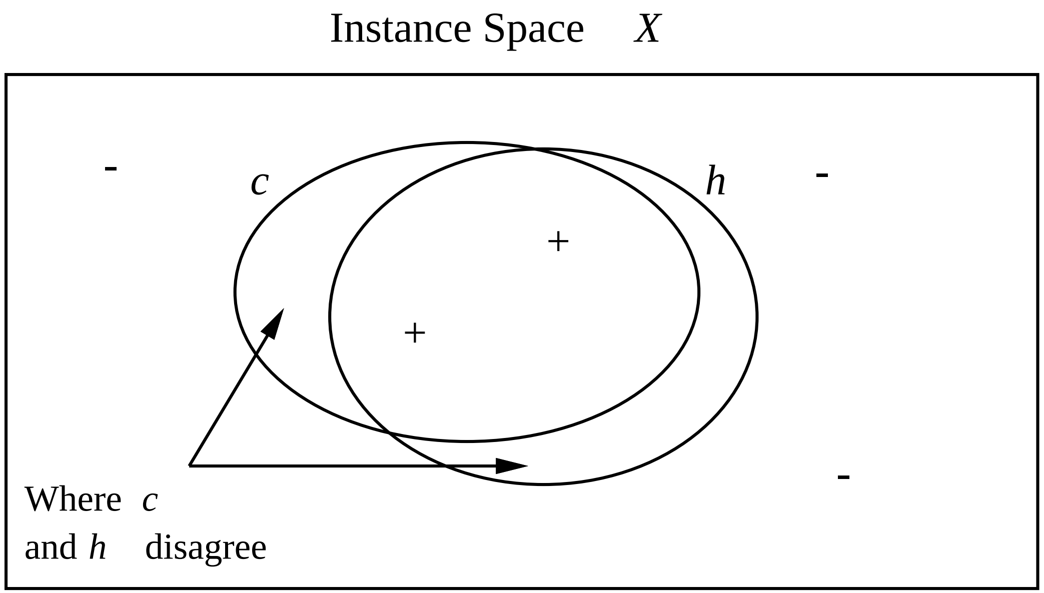
- $\boxed{\text{Training Set'} = \{(x^{(1)}, f(x^{(1)})), \ldots, (x^{(N_{\widehat{tr}})}, f(x^{(N_{\widehat{tr}})}))\}}$
  usato direttamente dall'algoritmo di apprendimento;

- $\boxed{\text{Validation Set} = \{(x^{(1)}, f(x^{(1)})), \ldots, (x^{(N_{val})}, f(x^{(N_{val})}))\}}$
  usato indirettamente dall'algoritmo di apprendimento.

Il Validation Set serve per scegliere l'ipotesi $h \in \mathcal{H}$ migliore fra quelle consistenti con il Training Set'



Errore Ideale



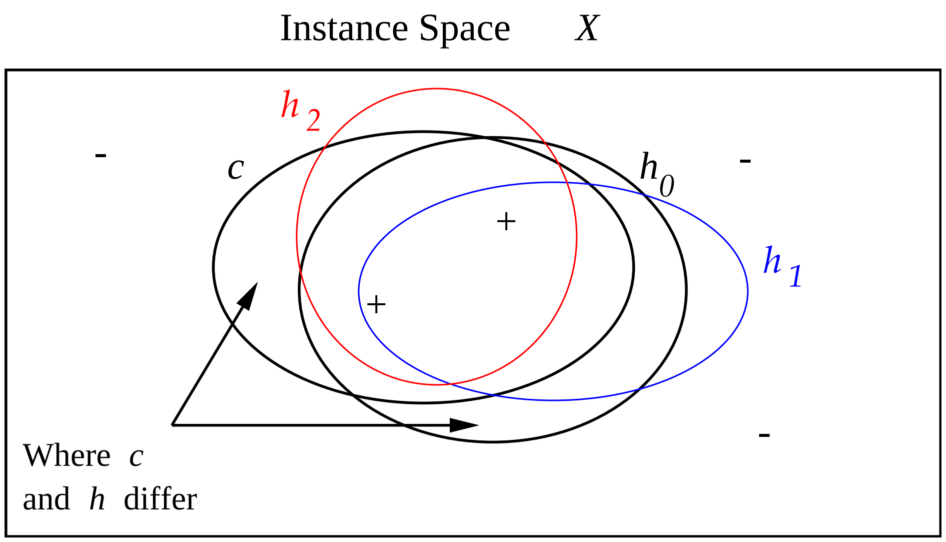
Supponiamo che la funzione f da apprendere sia una funzione booleana (concetto):

$$f : X \rightarrow \{0, 1\} \; (\{-, +\})$$

Def: L'**Errore Ideale** ($error_{\mathcal{D}}(h)$) di una ipotesi h rispetto al concetto f e la distribuzione di probabilità $\mathcal{D}$ (probabilità di osservare l'ingresso $x \in X$) è la probabilità che h classifichi erroneamente un input selezionato a caso secondo $\mathcal{D}$:

$$error_{\mathcal{D}}(h) \equiv \Pr_{x \in \mathcal{D}} [f(x) \neq h(x)]$$

Errore di Apprendimento



Dato Tr = Training Set', più ipotesi possono essere consistenti: h_0, h_1, h_2 quale scegliere ?

Def: L'**Errore Empirico** ($error_{Tr}(h)$) di una ipotesi h rispetto a Tr è il numero di esempi che h classifica erroneamente: $error_{Tr}(h) \equiv \#\{(x, f(x)) \in Tr | f(x) \neq h(x)\}$

Def: Una ipotesi $h \in \mathcal{H}$ è sovraspecializzata (**overfit**) Tr se $\exists h' \in \mathcal{H}$ tale che $error_{Tr}(h) < error_{Tr}(h')$, ma $error_{\mathcal{D}}(h) > error_{\mathcal{D}}(h')$.

Il Validation Set serve per cercare di selezionare l'ipotesi migliore (evitare **overfit**).

VC-dimension

Definizione: Frammentazione (Shattering)

Dato $S \subset X$, S è frammentato (shattered) dallo spazio delle ipotesi $\mathcal{H}$ se e solo se

$$\forall S' \subseteq S,\ \exists h \in \mathcal{H},\ \text{tale che}\ \forall x \in S,\ h(x) = 1 \Leftrightarrow x \in S'$$

($\mathcal{H}$ realizza tutte le possibili dicotomie di S)

Definizione: VC-dimension

La VC-dimension di uno spazio delle ipotesi $\mathcal{H}$ definito su uno spazio delle istanze X è data dalla cardinalità del sottoinsieme più grande di X che è frammentato da $\mathcal{H}$:

$$VC(\mathcal{H}) = \max_{S \subseteq X} |S| :\ \mathcal{H}\ \text{frammenta}\ S$$

$VC(\mathcal{H}) = \infty$ se S non è limitato