

Correttezza di GMP

Bisogna mostrare che

$$p_1', \dots, p_n', (p_1 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q) \models q\theta$$

dato che $p_i'\theta = p_i\theta$ per tutte le i

Lemma: per ogni clausola definita p , abbiamo $p \models p\theta$ per mezzo di UI

1. $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q) \models (p_1 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q)\theta = (p_1\theta \wedge \dots \wedge p_n\theta \Rightarrow q\theta)$
2. $p_1', \dots, p_n' \models p_1' \wedge \dots \wedge p_n' \models p_1'\theta \wedge \dots \wedge p_n'\theta$
3. da 1 e 2, $q\theta$ segue da Modus Ponens ordinario

Esempio di base di conoscenza

La legge in America dice che è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili. La nazione Nono, nemico dell'America, possiede alcuni missili, venduti alla nazione dal Colonnello West, che è americano.

Provare che Col. West è un criminale

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$\textit{American}(x) \wedge \textit{Weapon}(y) \wedge \textit{Sells}(x, y, z) \wedge \textit{Hostile}(z) \Rightarrow \textit{Criminal}(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists x \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \wedge \textit{Missile}(x)$:

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$\textit{American}(x) \wedge \textit{Weapon}(y) \wedge \textit{Sells}(x, y, z) \wedge \textit{Hostile}(z) \Rightarrow \textit{Criminal}(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists x \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \wedge \textit{Missile}(x)$:

$$\textit{Owns}(\textit{Nono}, M_1) \wedge \textit{Missile}(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$\textit{American}(x) \wedge \textit{Weapon}(y) \wedge \textit{Sells}(x, y, z) \wedge \textit{Hostile}(z) \Rightarrow \textit{Criminal}(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists x \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \wedge \textit{Missile}(x)$:

$$\textit{Owns}(\textit{Nono}, M_1) \wedge \textit{Missile}(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$$\textit{Missile}(x) \wedge \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \Rightarrow \textit{Sells}(\textit{West}, x, \textit{Nono})$$

I missili sono armi:

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$\textit{American}(x) \wedge \textit{Weapon}(y) \wedge \textit{Sells}(x, y, z) \wedge \textit{Hostile}(z) \Rightarrow \textit{Criminal}(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists x \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \wedge \textit{Missile}(x)$:

$$\textit{Owns}(\textit{Nono}, M_1) \wedge \textit{Missile}(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$$\textit{Missile}(x) \wedge \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \Rightarrow \textit{Sells}(\textit{West}, x, \textit{Nono})$$

I missili sono armi:

$$\textit{Missile}(x) \Rightarrow \textit{Weapon}(x)$$

Un nemico dell'America è "ostile":

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$\textit{American}(x) \wedge \textit{Weapon}(y) \wedge \textit{Sells}(x, y, z) \wedge \textit{Hostile}(z) \Rightarrow \textit{Criminal}(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists x \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \wedge \textit{Missile}(x)$:

$$\textit{Owns}(\textit{Nono}, M_1) \wedge \textit{Missile}(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$$\textit{Missile}(x) \wedge \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \Rightarrow \textit{Sells}(\textit{West}, x, \textit{Nono})$$

I missili sono armi:

$$\textit{Missile}(x) \Rightarrow \textit{Weapon}(x)$$

Un nemico dell'America è "ostile":

$$\textit{Enemy}(x, \textit{America}) \Rightarrow \textit{Hostile}(x)$$

West, che è americano ...

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$\textit{American}(x) \wedge \textit{Weapon}(y) \wedge \textit{Sells}(x, y, z) \wedge \textit{Hostile}(z) \Rightarrow \textit{Criminal}(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists x \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \wedge \textit{Missile}(x)$:

$$\textit{Owns}(\textit{Nono}, M_1) \wedge \textit{Missile}(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$$\textit{Missile}(x) \wedge \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \Rightarrow \textit{Sells}(\textit{West}, x, \textit{Nono})$$

I missili sono armi:

$$\textit{Missile}(x) \Rightarrow \textit{Weapon}(x)$$

Un nemico dell'America è "ostile":

$$\textit{Enemy}(x, \textit{America}) \Rightarrow \textit{Hostile}(x)$$

West, che è americano ...

$$\textit{American}(\textit{West})$$

La nazione Nono, un nemico dell' America ...

Esempio di base di conoscenza

... è un crimine per un americano vendere armi a nazioni ostili:

$$\textit{American}(x) \wedge \textit{Weapon}(y) \wedge \textit{Sells}(x, y, z) \wedge \textit{Hostile}(z) \Rightarrow \textit{Criminal}(x)$$

Nono ... possiede dei missili, cioè, $\exists x \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \wedge \textit{Missile}(x)$:

$$\textit{Owns}(\textit{Nono}, M_1) \wedge \textit{Missile}(M_1)$$

... tutti i suoi missili gli sono stati venduti dal Colonnello West

$$\textit{Missile}(x) \wedge \textit{Owns}(\textit{Nono}, x) \Rightarrow \textit{Sells}(\textit{West}, x, \textit{Nono})$$

I missili sono armi:

$$\textit{Missile}(x) \Rightarrow \textit{Weapon}(x)$$

Un nemico dell'America è "ostile":

$$\textit{Enemy}(x, \textit{America}) \Rightarrow \textit{Hostile}(x)$$

West, che è americano ...

$$\textit{American}(\textit{West})$$

La nazione Nono, un nemico dell' America ...

$$\textit{Enemy}(\textit{Nono}, \textit{America})$$

Algoritmo di Forward chaining

```
function FOL-FC-ASK( $KB, \alpha$ ) returns una sostituzione oppure false
  repeat until new è vuoto
     $new \leftarrow \{ \}$ 
    for each formula  $r$  in  $KB$  do
       $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q) \leftarrow \text{STANDARDIZZA-SEPARATAMENTE}(r)$ 
      for each  $\theta$  tale che  $\text{SUBST}(\theta, p_1 \wedge \dots \wedge p_n) = \text{SUBST}(\theta, p'_1 \wedge \dots \wedge p'_n)$ 
        per qualche  $p'_1, \dots, p'_n$  nella  $KB$ 
           $q' \leftarrow \text{SUBST}(\theta, q)$ 
          if  $q'$  non è la ridenominazione di una formula già presente nella  $KB$ 
            o in new then do
              aggiungi  $q'$  a new
               $\phi \leftarrow \text{UNIFY}(q', \alpha)$ 
              if  $\phi$  non è fallimento then return  $\phi$ 
    aggiungi new alla  $KB$ 
  return false
```

Prova tramite Forward chaining

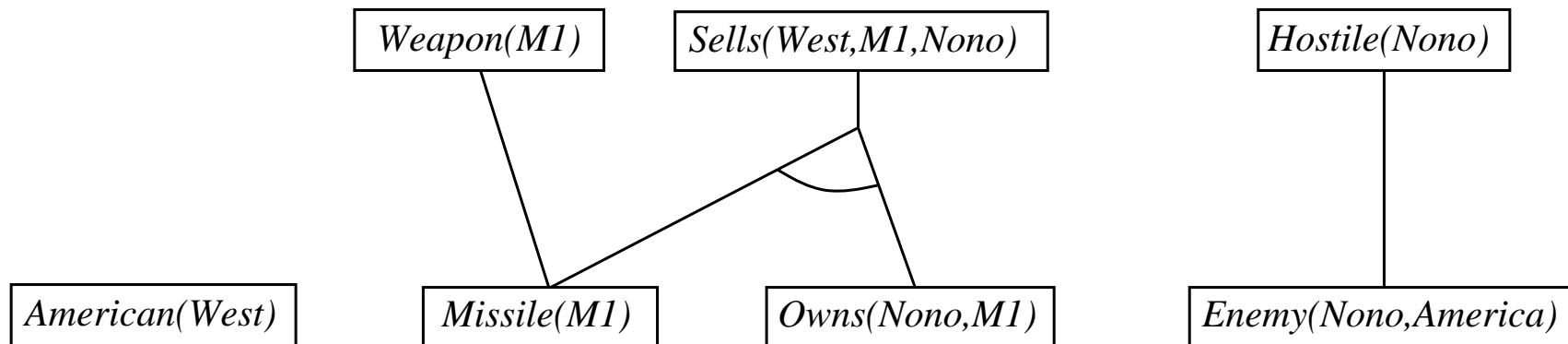
American(West)

Missile(M1)

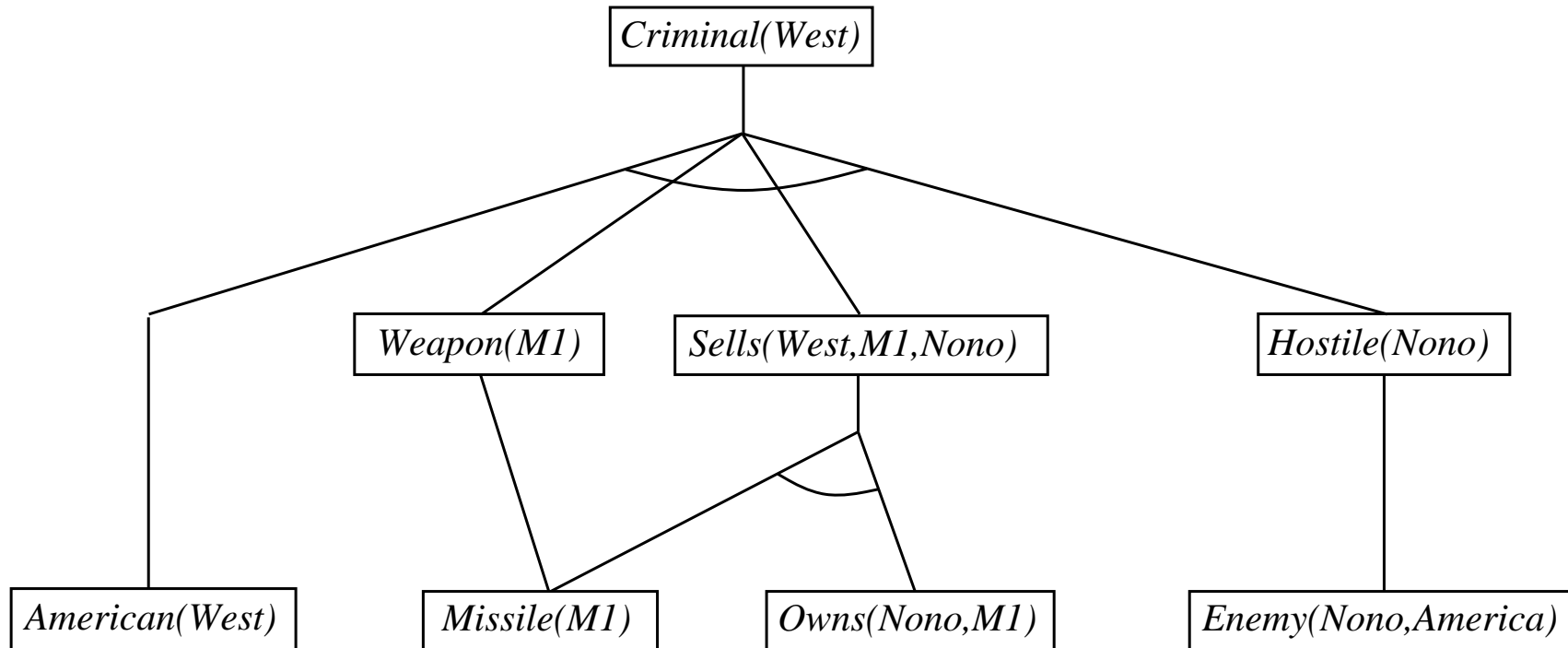
Owns(Nono,M1)

Enemy(Nono,America)

Prova tramite Forward chaining



Prova tramite Forward chaining



Proprietà di Forward chaining

Corretta e completa per clausole definite di primo ordine
(prova simile alla prova proposizionale)

Datalog = clausole definite del primo ordine + *nessuna funzione*

FC termina per Datalog in un numero di iterazioni polinomiale: al più $p \cdot n^k$
letterali

In generale può non terminare se α non è conseguenza logica

Ciò è inevitabile: entailment con clausole definite è semidecidibile

Efficienza di Forward chaining

Semplice osservazione: non c'è bisogno di “match-are” una regola alla iterazione k se una premessa non è stata aggiunta alla iterazione $k - 1$
⇒ “match-are” ogni regola le cui premesse contengono un letterale appena aggiunto

Il “matching” è costoso

Indicizzazione della Base di Dati permette il recupero di fatti conosciuti in $O(1)$

p.e., la query $Missile(x)$ recupera $Missile(M_1)$

Matching di premesse congiuntive rispetto a fatti conosciuti è NP-hard

Forward chaining è largamente utilizzato in basi di dati deduttive

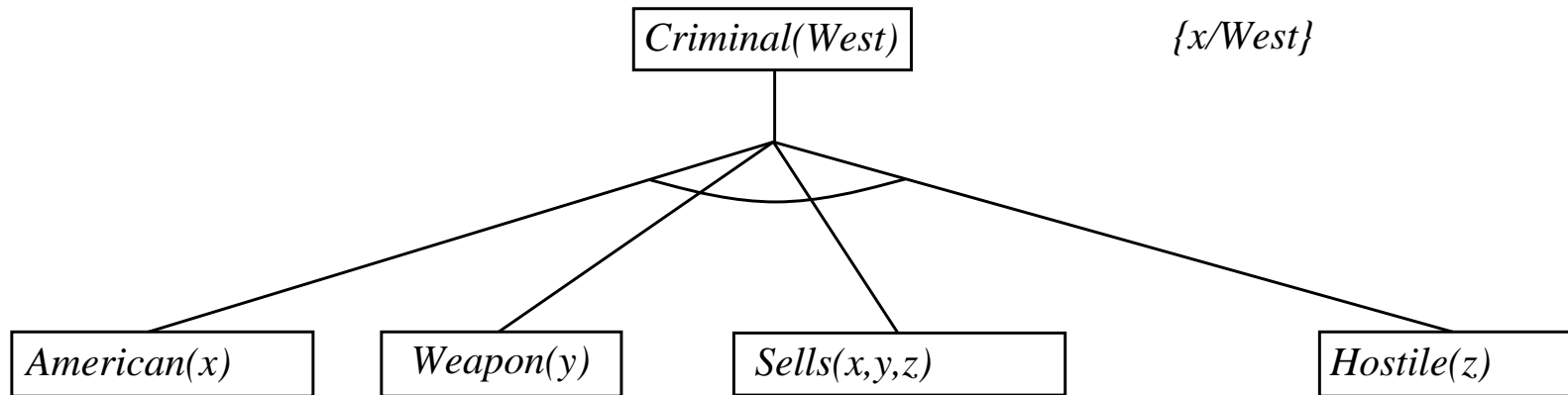
Algoritmo Backward chaining

```
function FOL-BC-ASK(KB, obiettivi,  $\theta$ ) returns un insieme di sostituzioni
inputs: KB, una base di conoscenza
           goals, una lista di congiunti che formano una query ( $\theta$  già applicato)
            $\theta$ , la sostituzione corrente, inizialmente la sostituzione vuota  $\{\}$ 
local variables: risposte, un insieme di sostituzioni, inizialmente vuoto
if obiettivi è vuoto then return  $\{\theta\}$ 
 $q' \leftarrow$  SUBST( $\theta$ , PRIMO(obiettivi))
for each formula in KB dove
           STANDARDIZZA-SEPARATAMENTE( $r$ ) = ( $p_1 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q$ )
           e  $\theta' \leftarrow$  UNIFY( $q, q'$ ) ha successo
           nuovi_obiettivi  $\leftarrow$  [ $p_1, \dots, p_n$  | RESTO(obiettivi)]
           risposte  $\leftarrow$  FOL-BC-ASK(KB, nuovi_obiettivi, COMPOSE( $\theta', \theta$ ))  $\cup$  risposte
return risposte
```

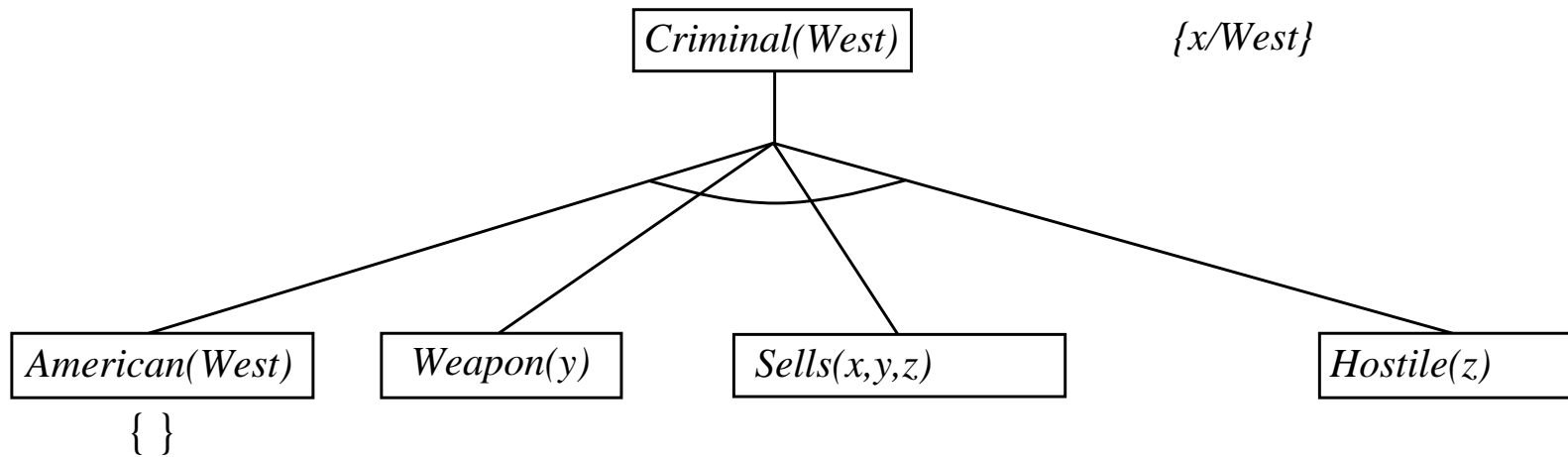
Esempio Backward chaining

Criminal(West)

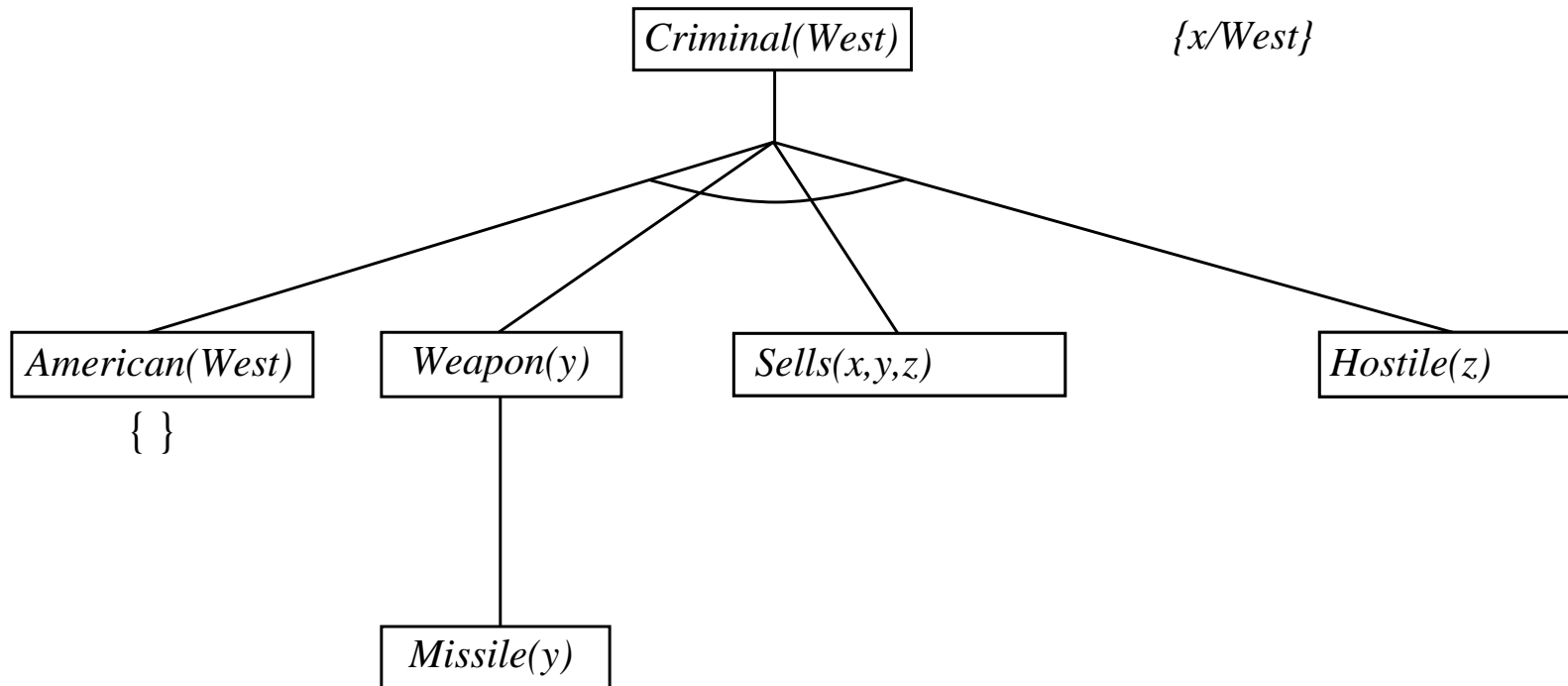
Esempio Backward chaining



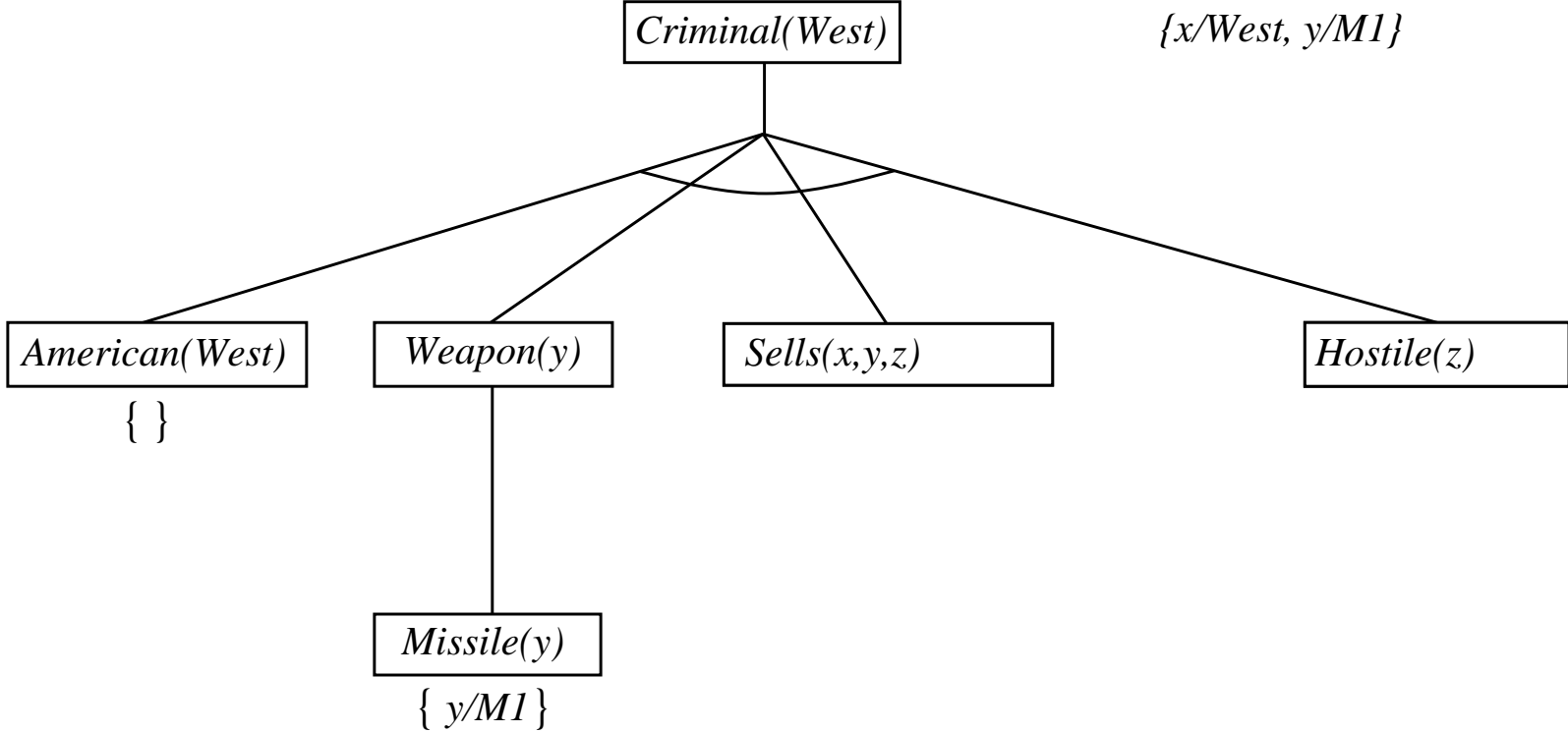
Esempio Backward chaining



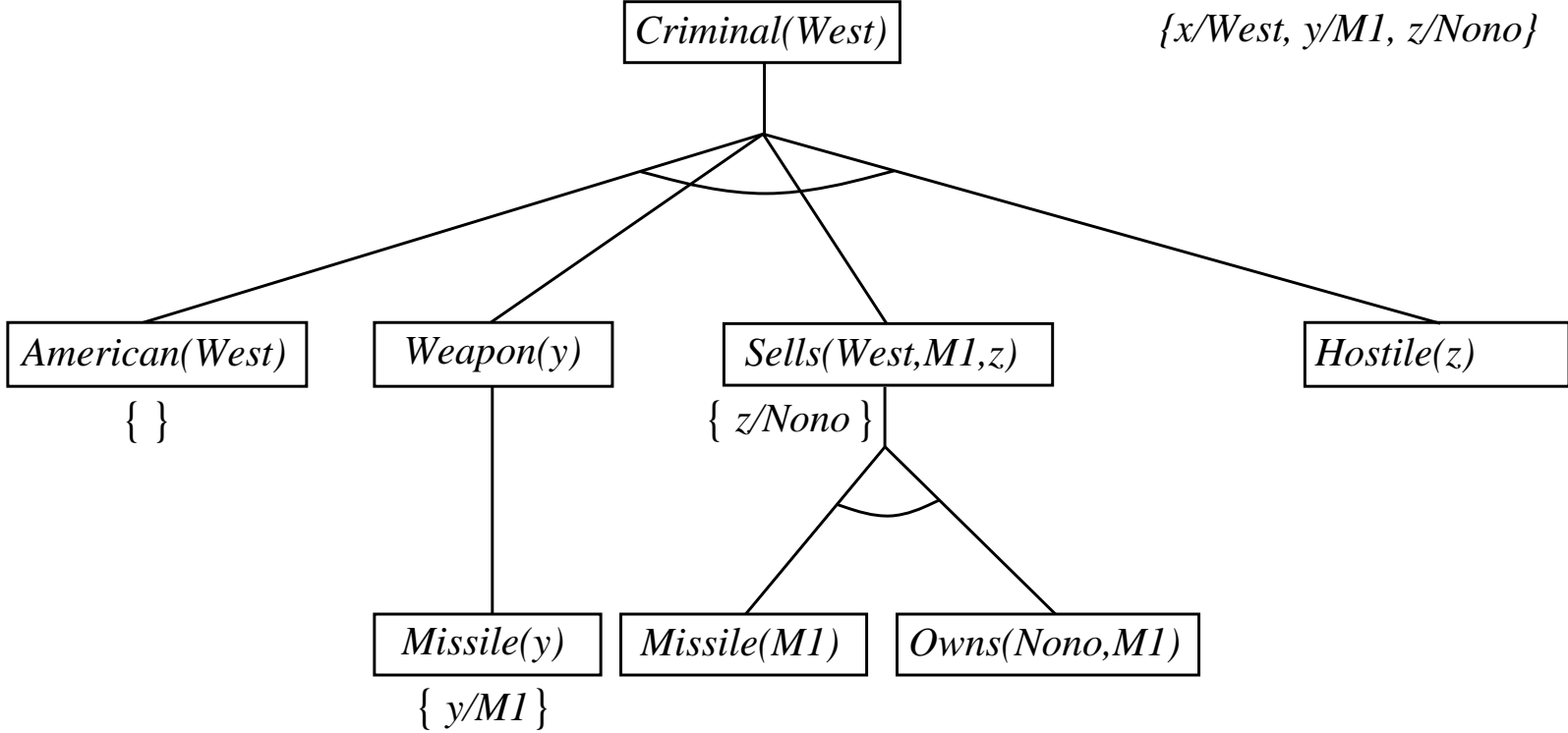
Esempio Backward chaining



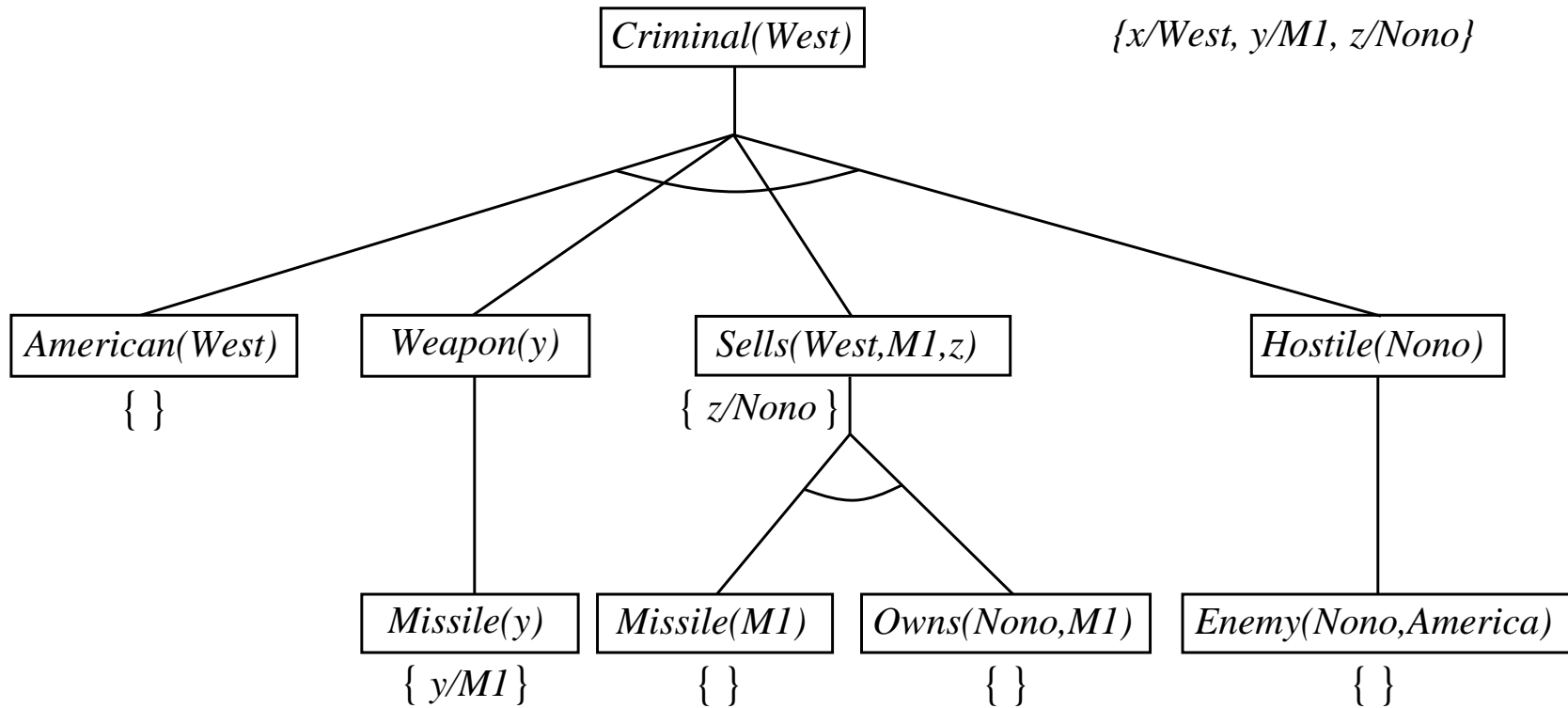
Esempio Backward chaining



Esempio Backward chaining



Esempio Backward chaining



Proprietà di backward chaining

Complessità in spazio lineare con la dimensione della prova

Incompleta a causa di cicli infiniti

⇒ bisogna controllare il goal corrente rispetto ad ogni goal sulla pila che implementa la ricerca in profondità

Inefficiente a causa di sottogoal ripetuti (sia successo che fallimento)

⇒ bisogna usare una cache che contiene i risultati già calcolati (spazio aggiuntivo!)

Largamente utilizzato (senza i miglioramenti!) per la [programmazione logica](#)

Programmazione Logica: Prolog

Base: backward chaining con clausole Horn + altro

Tecniche di compilazione \Rightarrow 60 milioni di LIPS

Programma = insieme di clausole = testa $:-$ letterale₁, ... letterale_n.

```
criminal(X) :- american(X), weapon(Y), sells(X,Y,Z), hostile(Z).
```

Unificazione efficiente tramite [open coding](#)

Recupero efficiente di clausole “attivabili” per mezzo di direct linking

Depth-first, left-to-right backward chaining

Predicati built-in per l'aritmetica etc., e.g., X is $Y * Z + 3$

Assunzione del mondo chiuso (Closed-world assumption) (“negazione come fallimento”)

```
p.e., dato vivo(X) :- not morto(X).
```

```
vivo(joe) ha successo se morto(joe) fallisce
```

Esempi di Prolog

Ricerca depth-first da uno stato iniziale X:

```
dfs(X) :- goal(X).
```

```
dfs(X) :- successor(X,S),dfs(S).
```

Append di due liste:

```
append([],Y,Y).
```

```
append([X|L],Y,[X|Z]) :- append(L,Y,Z).
```

```
query:    append(A,B,[1,2]) ?
```

```
risposte: A=[]      B=[1,2]
```

```
          A=[1]     B=[2]
```

```
          A=[1,2]   B=[]
```

Risoluzione: breve sommario

Versione completa del primo ordine:

$$\frac{\ell_1 \vee \dots \vee \ell_k, \quad m_1 \vee \dots \vee m_n}{(\ell_1 \vee \dots \vee \ell_{i-1} \vee \ell_{i+1} \vee \dots \vee \ell_k \vee m_1 \vee \dots \vee m_{j-1} \vee m_{j+1} \vee \dots \vee m_n)\theta}$$

dove $\text{UNIFY}(\ell_i, \neg m_j) = \theta$.

Per esempio,

$$\frac{\neg Rich(x) \vee Unhappy(x) \quad Rich(Ken)}{Unhappy(Ken)}$$

con $\theta = \{x/Ken\}$

Applica passi di risoluzione a $CNF(KB \wedge \neg\alpha)$; completo per FOL

Conversione a CNF

Ognuno che ama tutti gli animali è amato da qualcuno:

$$\forall x [\forall y (Animal(y) \Rightarrow Loves(x, y))] \Rightarrow [\exists y Loves(y, x)]$$

1. Eliminare doppie e singole implicazioni

$$\forall x [\neg \forall y (\neg Animal(y) \vee Loves(x, y))] \vee [\exists y Loves(y, x)]$$

2. Spostare \neg all'interno: $\neg \forall x, p \equiv \exists x \neg p$, $\neg \exists x, p \equiv \forall x \neg p$:

$$\forall x [\exists y \neg(\neg Animal(y) \vee Loves(x, y))] \vee [\exists y Loves(y, x)]$$

$$\forall x [\exists y \neg \neg Animal(y) \wedge \neg Loves(x, y)] \vee [\exists y Loves(y, x)]$$

$$\forall x [\exists y Animal(y) \wedge \neg Loves(x, y)] \vee [\exists y Loves(y, x)]$$

Conversione a CNF

3. Standardizzare variabili: ogni quantificatore deve usarne una differente

$$\forall x [\exists y \textit{Animal}(y) \wedge \neg \textit{Loves}(x, y)] \vee [\exists z \textit{Loves}(z, x)]$$

4. Skolemizzare:

ogni variabile esistenziale è rimpiazzata da una **funzione di Skolem** applicata a tutte quelle variabili quantificate universalmente nel cui scope compare il quantificatore esistenziale:

$$\forall x [\textit{Animal}(F(x)) \wedge \neg \textit{Loves}(x, F(x))] \vee \textit{Loves}(G(x), x)$$

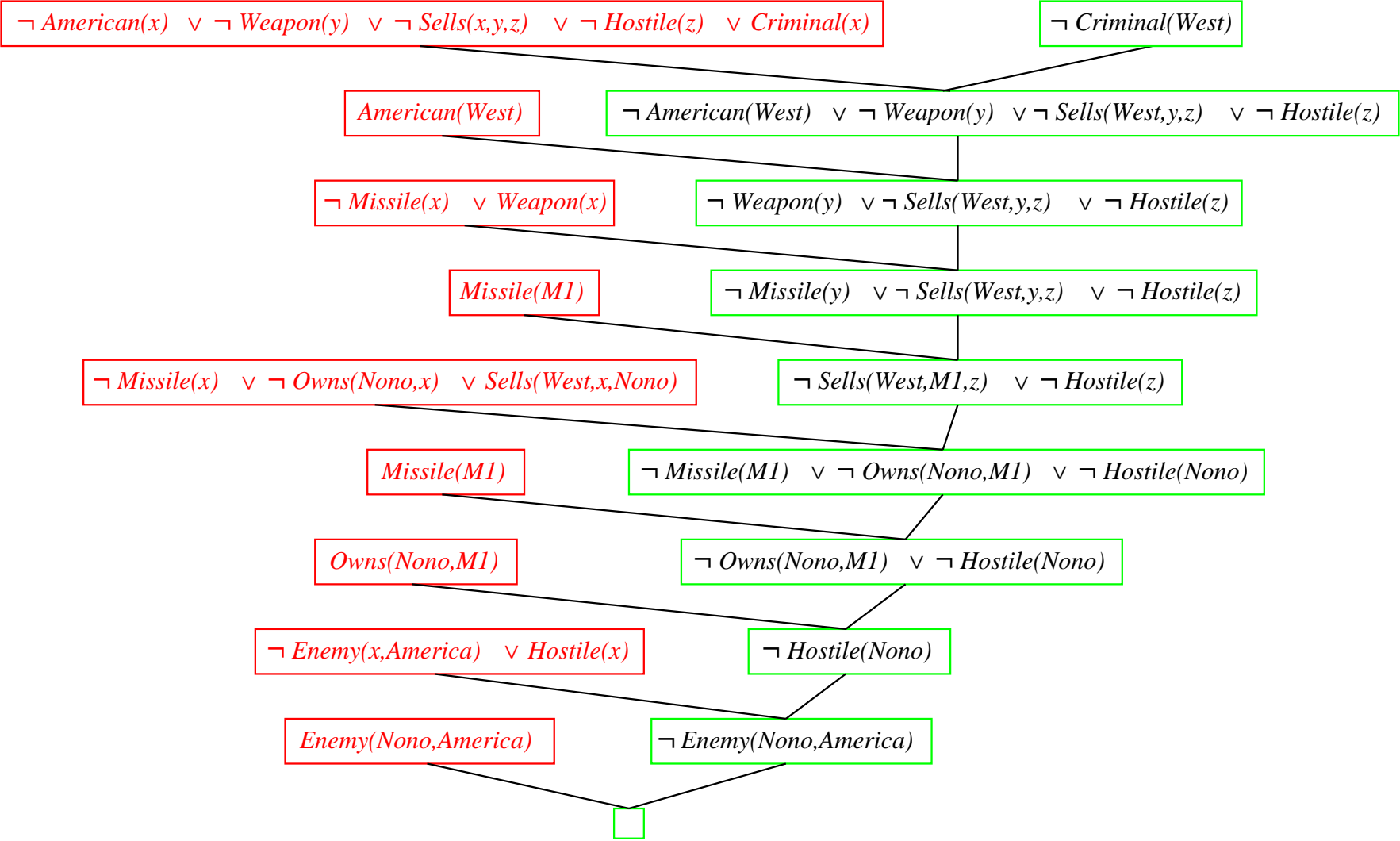
5. Rimuovere i quantificatori universali:

$$[\textit{Animal}(F(x)) \wedge \neg \textit{Loves}(x, F(x))] \vee \textit{Loves}(G(x), x)$$

6. Distribuire \wedge su \vee :

$$[\textit{Animal}(F(x)) \vee \textit{Loves}(G(x), x)] \wedge [\neg \textit{Loves}(x, F(x)) \vee \textit{Loves}(G(x), x)]$$

Prova di risoluzione per clausole definite



Strategie di risoluzione

◇ Unit Clause

Si preferisce effettuare la risoluzione con una delle sentenze costituita da un singolo letterale (clausola unitaria)

◇ Unit Resolution

Forma ristretta di risoluzione in cui ogni passo di risoluzione deve coinvolgere una clausola unitaria (incompleta in generale, completa per clausole di Horn)

◇ Set of Support

Basata sull'insieme di supporto da cui si preleva una delle sentenze e dove si pone il risolvente. Esempio di insieme di supporto: il goal (e tutti i risolventi derivati da esso)

◇ Input Resolution

Combina una sentenza in input (KB e Query) con il risolvente corrente. Tipica struttura a spina di pesce.

◇ Linear Resolution

Come Input Resolution, ma ammette anche la combinazione del risolvente corrente con suoi avi.

◇ Subsumption

Elimina tutte le sentenze che sono “subsumed” (più specifiche di altre). Es. $P(A)$ e $P(A) \vee P(B)$ sono più specifiche di $P(x)$.

Uguaglianza

Fino ad ora l'uguaglianza ($=$) non è stata trattata.

Esistono fondamentalmente 3 approcci diversi:

1. Assiomatizzazione

Idea base: si aggiungono assiomi che descrivono le proprietà dell'uguaglianza ed assiomi opportuni per ogni predicato e funzione.

2. Aggiunta di una nuova regola di inferenza (p.e., Demodulation, Paramodulation)

Idea base: se $x = y$ e $UNIFY(x, z) = \theta$,
rimpiazza z con $SUBST(\theta, y)$.

3. Estensione dell'algoritmo di unificazione

Idea base: unifica termini equivalenti,
p.e. $1 + 2$ e $2 + 1$.

Completezza Risoluzione: schema prova

Ogni insieme di sentenze S è rappresentabile in forma normale congiuntiva



Si assuma S insoddisfacibile e in forma normale congiuntiva



← Teorema di Herbrand

Qualche insieme S' di istanze ground è insoddisfacibile



← Teorema di Risoluzione per termini ground

La risoluzione può trovare una contraddizione in S'



← Lemma di Lifting

Prova tramite risoluzione dell'esistenza di una contraddizione per S

Riassunto

Inferenza in FOL

- ◇ Proposizionalizzazione ed uso di unificazione per evitare la istanziamento di variabili coinvolte in una prova.
- ◇ Modus Ponens Generalizzato (GMP) usa l'unificazione e permette l'applicazione di forward e backward chaining su clausole definite.
- ◇ GMP è completo per clausole definite, anche se determinare le conseguenze logiche è un problema semidecidibile. Per Datalog (no funzioni e clausole definite) il problema è decidibile.
- ◇ Forward chaining è completo e polinomiale per Datalog.
- ◇ Backward chaining è usato in Programmazione Logica (p.e., Prolog) e rinforzato con opportune tecniche di compilazione.
- ◇ Risoluzione generalizzata è completa per KB in forma normale congiuntiva (CNF). Se però si usa il principio di induzione \Rightarrow non completa.