Proprietà Ricerca Best First Ricorsiva

Come A*, la Ricerca Best First Ricorsiva è ottima se la funzione euristica $h(n)$ è ammissibile

Inoltre:

– Complessità spaziale: $O(bd)$

– Complessità temporale: difficile da definire (ma esponenziale, nel caso pessimo...)

In ogni caso, il problema di RBFS (ed anche IDA*) consiste nell'uso di troppa poca memoria

Gli algoritmi MA* (*memory-bounded A**) e SMA* (*simplified MA**) utilizzano esattamente tutta la memoria disponibile

Simplified MA*

La Simplified MA* procede come A*, espandendo la foglia migliore fino a quando la memoria è piena

Successivamente, per poter proseguire, deve cancellare dalla memoria un nodo vecchio per far posto ad un nodo nuovo

In particolare:

scarta sempre il nodo foglia peggiore (f-valore più alto, cioè quello in fondo alla coda)

l'f-valore del nodo scartato viene riportato sul nodo padre

si espande di nuovo il nodo padre quando tutti gli altri cammini sono peggiori

Simplified MA*: complicazione...

Cosa succede se *tutte* le foglie hanno lo stesso f-valore??

SMA* rischierebbe di scegliere lo stesso nodo sia per la cancellazione che per l'espansione!

Politica adottata:

rimuove la foglia più vecchia ed espande la foglia più recente

se queste coincidono, significa che la soluzione che passa da quel nodo non può essere contenuta dalla memoria disponibile...

... e quindi è giusto rimuoverla!

Quindi SMA* è

- completa solo se la soluzione può essere contenuta in memoria
- ottima se la soluzione è raggiungibile
  ... altrimenti restituisce la migliore soluzione raggiungibile

Algoritmi di miglioramento iterativo

In molti problemi di ottimizzazione, *il cammino* è irrilevante;
la soluzione è costituita dallo stato goal stesso

Quindi lo spazio degli stati è dato dall'insieme delle
configurazioni "complete";

trovare una configurazione *ottima*, es.: TSP

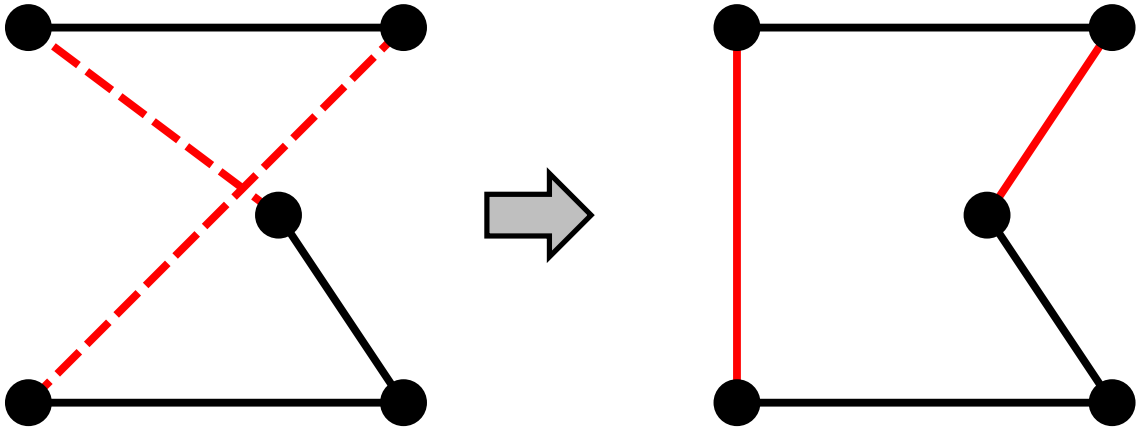
o, trovare una configurazione che soddisfi dei vincoli, es.: orario

In tali casi, si possono usare gli algoritmi di *miglioramento iterativo*;
Mantengono un singolo stato "corrente", e tentano di migliorarlo

Impiegano spazio costante, e sono quindi adatti sia per ricerca online che per ricerca offline

Esempio: Problema del commesso viaggiatore

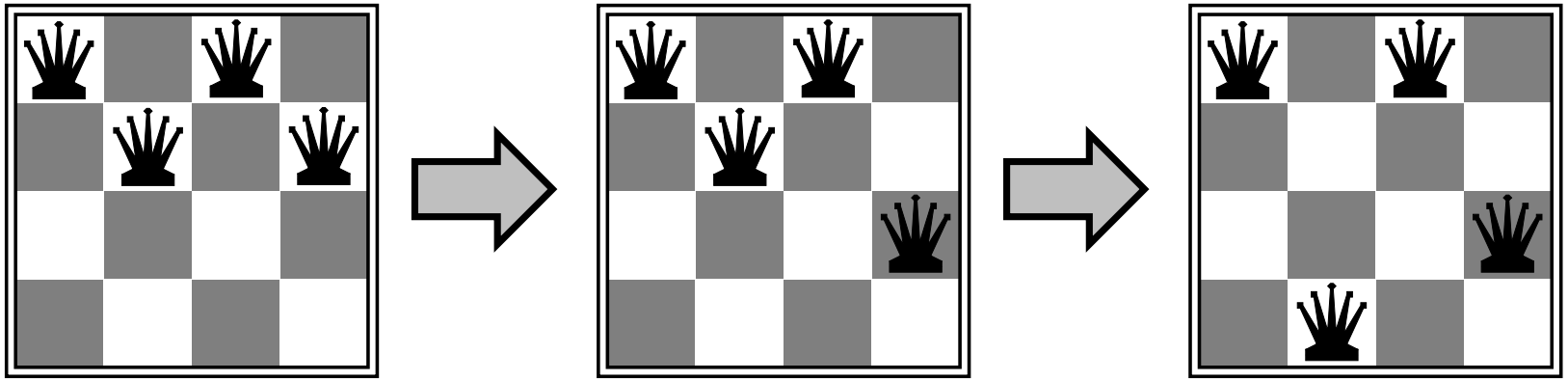
Si parte con un percorso qualsiasi, e si eseguono scambi a coppie



Esempio: n-regine

Disporre n regine su una scacchiera $n \times n$ senza che si minaccino
(non ci devono essere due regine sulla stessa riga, colonna, o diagonale)

Muovere una regina in modo da minimizzare il numero di minacce



Hill-climbing (o discesa/ascesa di gradiente)

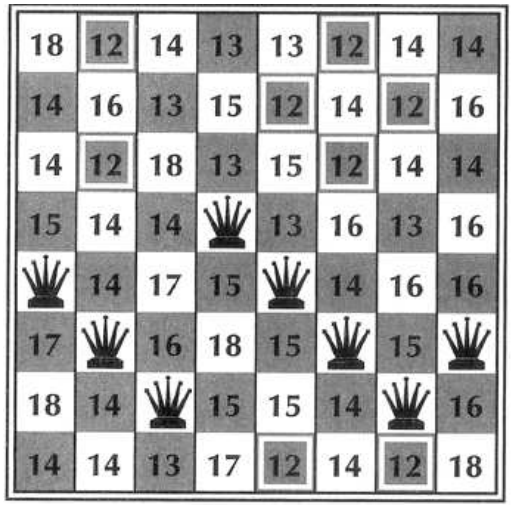
```
function HILL-CLIMBING(problema) returns uno stato che è un massimo locale
    inputs: problema, un problema
    variabili locali: nodo_corrente, un nodo
                      vicino, un nodo

    nodo_corrente ← CREA-NODO(STATO-INIZIALE[problema])
    loop do
        vicino ← il successore di nodo_corrente di valore più alto
        if VALORE[vicino] ≤ VALORE[nodo_corrente] then return STATO[nodo_corrente]
        nodo_corrente ← vicino
```

Hill-climbing: esempio delle 8 regine

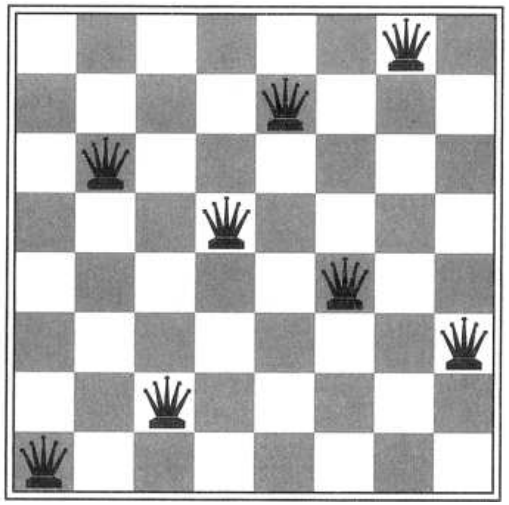
$h(s) =$ *numero di coppie di regine che si attaccano a vicenda*

Quanti successori per ogni stato ? 8×7

(# regine × caselle libere su colonna/riga [deve esserci 1 regina per colonna/riga])



Uno stato con $h = 17$ e valori di h per ogni successore indicati

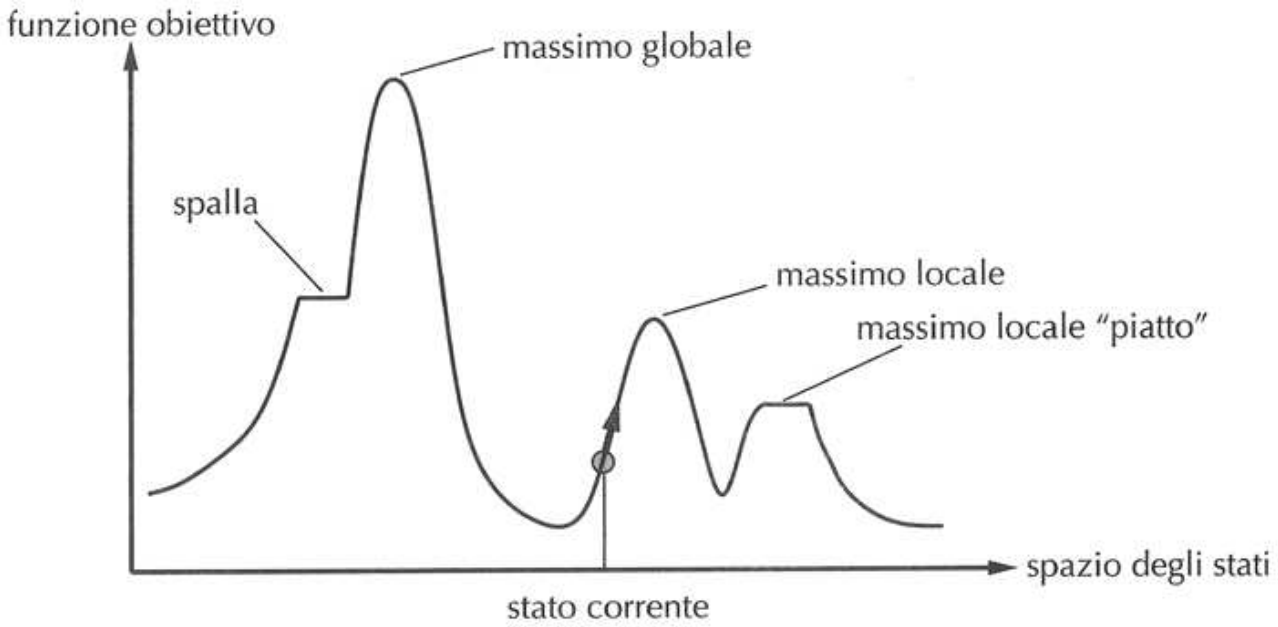


Un minimo locale con $h = 1$. Ogni successore di questo stato ha $h > 1$.

Lo stato a destra "dista" solo 5 passi da quello a sinistra

Hill-climbing: massimi locali ed altri problemi

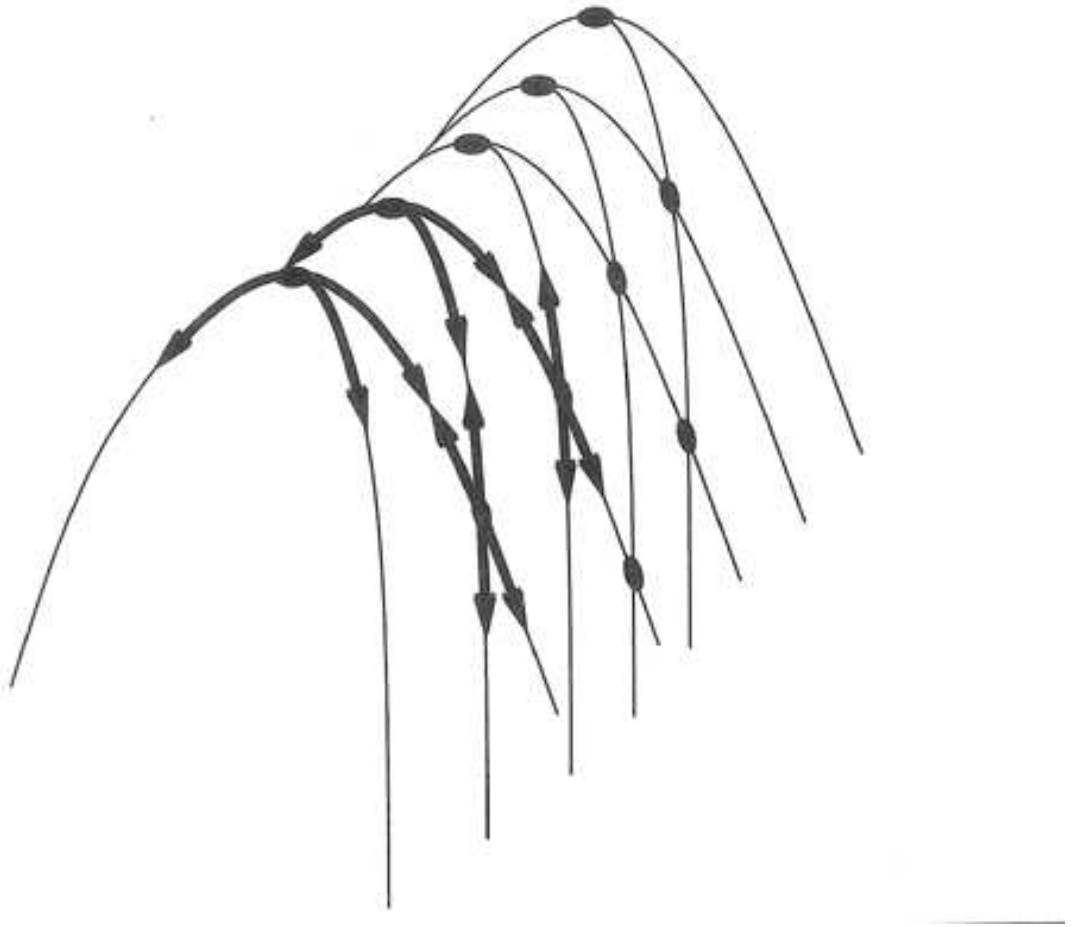
Problemi: a seconda dello stato iniziale, può fermarsi su dei massimi locali e/o "spalle"



Nel caso di spazi continui è difficile scegliere la dimensione del passo di progressione ed inoltre si può avere una convergenza molto lenta

Hill-climbing: cresta (*ridge*)

Sequenza di massimi locali (a valore crescente muovendosi verso l''interno" della figura) molto difficili da esplorare per Hill-climbing



Hill-climbing: alcune soluzioni

Possibili soluzioni:

- plateau (h piatta): "mossa laterale", cioè ci si sposta in uno stato con identico valore di h
  - bisogna stare attenti ad evitare cicli, specialmente nel caso di massimi (minimi) locali piatti
  - tipica soluzione: porre un limite massimo al numero consecutivo di mosse laterali
- massimi (minimi) locali: eseguire scelte stocastiche e/o più ricerche da stati iniziali diversi
  - Hill-climbing stocastico: scegliere a caso fra tutte le mosse che migliorano h, eventualmente usando una probabilità di selezione che è proporzionale al miglioramento (convergenza + lenta, ma spesso soluzioni migliori)
  - Hill-climbing con riavvio casuale: esegue più ricerche a partire da stati iniziali diversi (scelti a caso). Se p è la probabilità di trovare una soluzione ottima per una singola ricerca, il numero di ricerche atteso prima di trovare una soluzione ottima è $1/p$

Hill-climbing e le 8 regine

Numero stati: 8^8 (circa 17 milioni)

- Hill-climbing standard
  - soluzione (ottima) trovata il 14% delle volte
  - in media circa 4 passi per trovare una soluzione, altrimenti circa 3 passi in caso di soluzione subottima
- Hill-climbing con mosse lateriali (non più di 100 consecutive)
  - soluzione (ottima) trovata il 94% delle volte
  - in media circa 21 passi per trovare una soluzione, altrimenti circa 64 passi in caso di soluzione subottima
- Hill-climbing con riavvio casuale
  - soluzione (ottima) trovata con probabilità $p = 0,14$, quindi circa 7 ricerche per trovare una soluzione ottima ($(1-p)/p = 6,14$ fallimenti $+ 1$ successo). Numero di passi complessivo atteso: $3(1-p)/p + 4 = 22,43$
  - con mosse laterali: soluzione (ottima) trovata con probabilità $p = 0,94$, quindi circa $1,06$ ricerche per trovare una soluzione ottima ($(1-p)/p = 0,06$ fallimenti $+ 1$ successo). Numero di passi complessivo atteso: $0,06(1-p)/p + 21 = 25,08$

Simulated annealing

Idea: evitare i massimi locali permettendo delle mosse "cattive"
ma gradualmente decrementare la loro grandezza e frequenza

```
function SIMULATED-ANNEALING(problema, raffreddamento) returns uno stato soluzione
    inputs: problema, un problema
            velocità_raffreddamento, una corrispondenza dal tempo alla "temperatura"
    variabili locali: nodo_corrente, un nodo
                      successivo, un nodo
                      T, una "temperatura" che controlla la probabilità
                           di compiere passi verso il basso

    nodo_corrente ← CREA-NODO(STATO-INIZIALE[problema])
    for t ← 1 to ∞ do
        T ← velocità_raffreddamento[t]
        if T = 0 then return nodo_corrente
        successivo ← un successore scelto a caso di nodo_corrente
        ΔE ← VALORE[successivo] – VALORE[nodo_corrente]
        if ΔE > 0 then nodo_corrente ← successivo
        else nodo_corrente ← successivo solo con probabilità e^(ΔE/T)
```

Proprietà del simulated annealing

A "temperatura" fissata T, la probabilità di occupazione degli stati raggiunge la distribuzione di Boltzmann

$$p(x) = \alpha e^{\frac{E(x)}{kT}}$$

T diminuito abbastanza lentamente $\Longrightarrow$ si raggiunge sempre lo stato migliore (Metropolis et al., 1953, per problemi di modellazione di processi fisici)

Ampiamente usato in applicazioni pratiche, come la progettazione di circuiti VLSI e la definizione degli orari dei voli delle linee aeree