

# LOGICA DEL PRIMO ORDINE

## CAPITOLO 8

*– docente: Alessandro Sperduti –*

*– presentazione basata sui lucidi di S. Russell –*

# Outline

- ◇ Perchè FOL (First-Order Logic) ?
- ◇ Sintassi e Semantica di FOL
- ◇ Esempi di sentenze

# Pro e contro della Logica Proposizionale

- ☺ La Logica Proposizionale è *dichiarativa*: pezzi di sintassi corrispondono a fatti
- ☺ La Logica Proposizionale permette di esprimere informazione parziale/disgiuntiva/negata (al contrario di molte strutture dati e basi di dati)
- ☺ La Logica Proposizionale è *composizionale*:  
il significato di  $B_{1,1} \wedge P_{1,2}$  è derivato dal significato di  $B_{1,1}$  e di  $P_{1,2}$
- ☺ Il significato nella Logica Proposizionale è *indipendente dal contesto* (al contrario del linguaggio naturale, dove il significato dipende dal contesto)
- ☹ La Logica Proposizionale ha una potenza espressiva molto limitata (al contrario del linguaggio naturale)  
P.e., non si può dire “le trappole causano la brezza in quadrati adiacenti”  
se non scrivendo una sentenza per quadrato

## Logica del Primo Ordine (First-order logic)

Mentre la Logica Proposizionale assume che il mondo contenga *fatti*, la Logica del Primo Ordine (come il linguaggio naturale) assume che il mondo contenga

- **Oggetti**: persone, case, numeri, teorie, Paolino Paperino, colori, partite di calcio, guerre, secoli . . .
- **Relazioni**: rosso, rotondo, finto, primo . . . , fratello di, più grande di, dentro, parte di, ha colore, occorso dopo, possiede, . . .
- **Funzioni**: padre di, miglior amico, secondo tempo di, inizio di . . .

# Logica in generale

Linguaggio	Scelta Ontologica	Scelta Epistemologica
Logica Proporzionale	fatti	vero/falso/sconosciuto
Logica del Primo Ordine	fatti, oggetti, relazioni	vero/falso/sconosciuto
Logica Temporale	fatti, oggetti, relazioni, tempi	vero/falso/sconosciuto
Teoria delle Probabilità	fatti	gradi di credenza $\in [0, 1]$
Logica Fuzzy	fatti con gradi di verità $\in [0, 1]$	valore conosciuto

## Sintassi di FOL: elementi base

Costanti	<i>ReGiovanni, 2, UP,...</i>
Predicati	<i>Fratello, &gt;,...</i>
Funzioni	<i>Sqrt, GambaSinistraDi,...</i>
Variabili	<i>x, y, a, b,...</i>
Connettivi	$\wedge \vee \neg \Rightarrow \Leftrightarrow$
Uguaglianza	$=$
Quantificatori	$\forall \exists$

## Sentenze Atomiche

Sentenza atomica =  $\text{predicato}(\text{termine}_1, \dots, \text{termine}_n)$   
o  $\text{termine}_1 = \text{termine}_2$

Termine =  $\text{funzione}(\text{termine}_1, \dots, \text{termine}_n)$   
o *costante* o *variabile*

P.e.,  $\text{Fratello}(\text{ReGiovanni}, \text{RiccardoCuorDiLeone})$   
>  $(\text{Lung}(\text{GambaSinistraDi}(\text{Riccardo})), \text{Lung}(\text{GambaSinistraDi}(\text{ReGiovanni})))$

# Sentenze Complesse

Le sentenze complesse sono create da sentenze atomiche usando i connettivi

$$\neg S, \quad S_1 \wedge S_2, \quad S_1 \vee S_2, \quad S_1 \Rightarrow S_2, \quad S_1 \Leftrightarrow S_2$$

P.e.  $\text{Fratello}(\text{ReGiovanni}, \text{Riccardo}) \Rightarrow \text{Fratello}(\text{Riccardo}, \text{ReGiovanni})$

$$>(1, 2) \vee \leq(1, 2)$$

$$>(1, 2) \wedge \neg >(1, 2)$$



# Verità nella Logica del Primo Ordine

Le sentenze sono vere rispetto ad un **modello** ed una **interpretazione**

Il modello contiene  $\geq 1$  oggetti (**elementi di dominio**) e relazioni fra loro

L'interpretazione specifica i referenti per

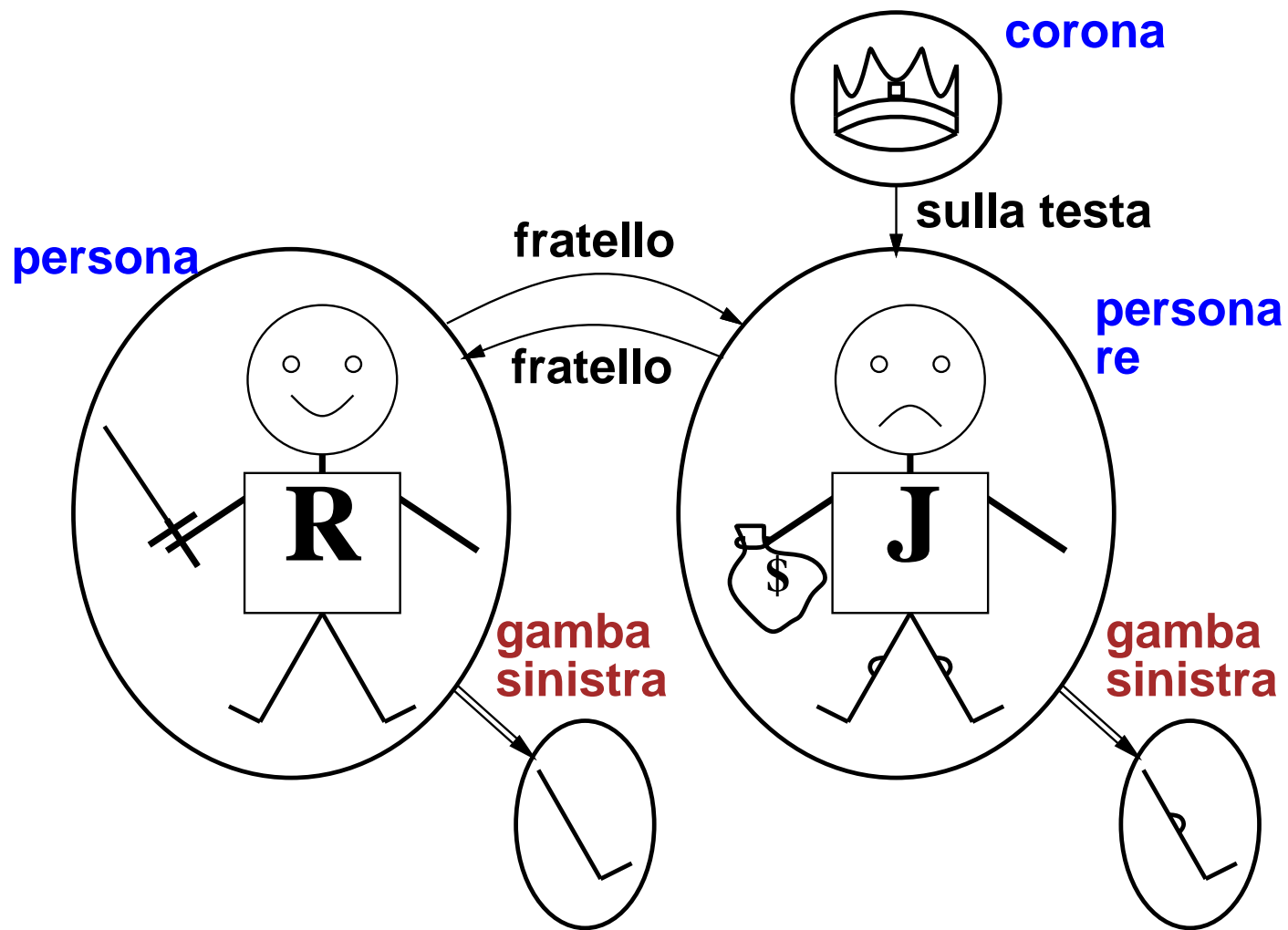
*simboli di costanti*  $\rightarrow$  oggetti

*simboli di predicati*  $\rightarrow$  relazioni

*simboli di funzione*  $\rightarrow$  relazioni funzionali

Una sentenza atomica  $\text{predicato}(termine_1, \dots, termine_n)$  è vera  
sse gli **oggetti** riferiti da  $termine_1, \dots, termine_n$   
sono nella **relazione** riferita dal *predicato*

# Modelli per FOL: Esempio



## Modelli per FOL: Tanti!

Si *possono* enumerare i modelli per il vocabolario di una data KB:

Per ogni numero di elementi di dominio  $n$ , da 1 a  $\infty$

Per ogni predicato  $k$ -ario  $P_k$  nel vocabolario

Per ogni possibile relazione  $k$ -aria su  $n$  oggetti

Per ogni simbolo di costante  $C$  nel vocabolario

Per ogni scelta di referente per  $C$  da  $n$  oggetti ...

Calcolare le conseguenze logiche enumerando i modelli non è facile!

# Quantificatori Universali

$\forall$  *\langle*variabili*\rangle* *\langle*sentenza*\rangle*

Chiunque a Padova è intelligente:

$\forall x \text{ Luogo}(x, \text{Padova}) \Rightarrow \text{Intelligente}(x)$

$\forall x P$  è vero in un modello  $m$  sse  $P$  è vero essendo  $x$  ogni possibile oggetto nel modello

In prima approssimazione, equivalente alla **congiunzione** di **istanziamenti** di  $P$

$\text{Luogo}(\text{ReGiovanni}, \text{Padova}) \Rightarrow \text{Intelligente}(\text{ReGiovanni})$   
 $\wedge \text{Luogo}(\text{Riccardo}, \text{Padova}) \Rightarrow \text{Intelligente}(\text{Riccardo})$   
 $\wedge \text{Luogo}(\text{Padova}, \text{Padova}) \Rightarrow \text{Intelligente}(\text{Padova})$   
 $\wedge \dots$

## Uno sbaglio comune da evitare

Tipicamente,  $\Rightarrow$  è il connettivo principale usato con  $\forall$

Sbaglio comune: uso di  $\wedge$  come connettivo principale con  $\forall$ :

$$\forall x \text{ Luogo}(x, \text{Padova}) \wedge \text{Intelligente}(x)$$

significa “Chiunque è a Padova e chiunque è intelligente”

# Quantificatore esistenziale

$\exists \langle \text{variabili} \rangle \langle \text{sentenza} \rangle$

Qualcuno a Bologna è intelligente:

$\exists x \text{ Luogo}(x, \text{Bologna}) \wedge \text{Intelligente}(x)$

$\exists x P$  è vero in un modello  $m$  sse  $P$  è vero essendo  $x$  qualche possibile oggetto nel modello

In prima approssimazione, equivalente alla **disgiunzione di istanziazioni** di  $P$

$\text{Luogo}(\text{ReGiovanni}, \text{Bologna}) \wedge \text{Intelligente}(\text{ReGiovanni})$   
 $\vee \text{Luogo}(\text{Richard}, \text{Bologna}) \wedge \text{Intelligente}(\text{Richard})$   
 $\vee \text{Luogo}(\text{Bologna}, \text{Bologna}) \wedge \text{Intelligente}(\text{Bologna})$   
 $\vee \dots$

## Un altro sbaglio comune da evitare

Tipicamente,  $\wedge$  è il connettivo principale usato con  $\exists$

Sbaglio comune: uso di  $\Rightarrow$  come connettivo principale con  $\exists$ :

$$\exists x \text{ Luogo}(x, \text{Bologna}) \Rightarrow \text{Intelligente}(x)$$

è vero se c'è qualcuno che non è a Bologna!

## Proprietà dei quantificatori

$\forall x \forall y$  è lo stesso di  $\forall y \forall x$  (Perchè??)

$\exists x \exists y$  è lo stesso di  $\exists y \exists x$  (Perchè??)

$\exists x \forall y$  **non** è lo stesso di  $\forall y \exists x$

$\exists x \forall y \text{ Ama}(x, y)$

“C’è una persona che ama chiunque nel mondo”

$\forall y \exists x \text{ Ama}(x, y)$

“Ognuno nel mondo è amato da almeno una persona”

**Dualità dei quantificatori:** ognuno può essere espresso usando l’altro

$\forall x \text{ Piace}(x, \text{gelato}) \quad \neg \exists x \neg \text{Piace}(x, \text{gelato})$

$\exists x \text{ Piace}(x, \text{broccoli}) \quad \neg \forall x \neg \text{Piace}(x, \text{broccoli})$



## Esempi di sentenze

Fratelli sono siblings (fratelli germani: leggi “fratelli e sorelle”)

## Esempi di sentenze

Fratelli sono siblings

$\forall x, y \text{ Fratello}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y).$

“Sibling” è simmetrico

## Esempi di sentenze

Fratelli sono siblings

$$\forall x, y \text{ Fratello}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y).$$

“Sibling” è simmetrico

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow \text{Sibling}(y, x).$$

La madre di una persona è il genitore femmina della persona

## Esempi di sentenze

Fratelli sono siblings

$$\forall x, y \text{ Fratello}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y).$$

“Sibling” è simmetrico

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow \text{Sibling}(y, x).$$

La madre di una persona è il genitore femmina della persona

$$\forall x, y \text{ Madre}(x, y) \Leftrightarrow (\text{Femmina}(x) \wedge \text{Genitore}(x, y)).$$

Un cugino di primo grado è un figlio di un “sibling” di un genitore

## Esempi di sentenze

Fratelli sono siblings

$$\forall x, y \text{ Fratello}(x, y) \Rightarrow \text{Sibling}(x, y).$$

“Sibling” è simmetrico

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow \text{Sibling}(y, x).$$

La madre di una persona è il genitore femmina della persona

$$\forall x, y \text{ Madre}(x, y) \Leftrightarrow (\text{Femmina}(x) \wedge \text{Genitore}(x, y)).$$

Un cugino di primo grado è un figlio di un “sibling” di un genitore

$$\forall x, y \text{ CuginoIGrado}(x, y) \Leftrightarrow \exists p, ps \text{ Genitore}(p, x) \wedge \text{Sibling}(ps, p) \wedge \text{Genitore}(ps, y)$$

# Uguaglianza

$termine_1 = termine_2$  è vero per una data interpretazione se e solo se  $termine_1$  e  $termine_2$  si riferiscono allo stesso oggetto

P.e.,  $1 = 2$  e  $\forall x \times (Sqrt(x), Sqrt(x)) = x$  sono soddisfacibili  
 $2 = 2$  è valido

P.e., definizione di *Sibling* in termini di *Genitore*:

$$\forall x, y \text{ Sibling}(x, y) \Leftrightarrow [\neg(x = y) \wedge \exists m, f \neg(m = f) \wedge \\ \text{Genitore}(m, x) \wedge \text{Genitore}(f, x) \wedge \text{Genitore}(m, y) \wedge \text{Genitore}(f, y)]$$