Architettura degli Elaboratori 1

reti combinatorie

Alessandro Memo

Gennaio ‘03

Algebra di Boole

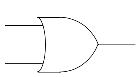
Un insieme **I** di elementi **a,b,c**,… e due operazioni α e β formano un’**algebra di Boole** $\mathbb{AB}$**=(I, α, β)** se

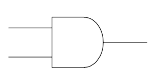
- le due operazioni sono binarie chiuse e godono della proprietà commutativa ed associativa
- ciascuna operazione gode della proprietà distributiva rispetto all’altra
- esiste per ogni operazione l’elemento neutro
- dato un qualsiasi elemento di I, esiste il suo complemento, che appartiene ancora ad **I**

Algebra di Boole

AB = ({ 0 , 1 } , somma [+], prodotto [•])

somma:		prodotto:	
	0 + 0 = 0		0 • 0 = 0
	0 + 1 = 1		0 • 1 = 0
	1 + 0 = 1		1 • 0 = 0
	1 + 1 = 1		1 • 1 = 1





Algebra di Boole

commutativa: $a + b = b + a$

$a \bullet b = b \bullet a$

associativa: $\boxed{a + (b + c) = (a + b) + c}$

$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

distributiva: $a + (b \bullet c)= (a + b) \bullet (a + c)$

$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

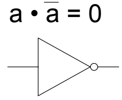
Algebra di Boole

elemento neutro: $a + 0 = a$

$a \bullet 1 = a$

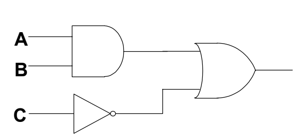
complemento: $a + \overline{a} = 1$

$a \bullet \overline{a} = 0$



Esercizi tipo 1: dalla rete comb. alla funzione

Dato la seguente rete combinatoria:



1. determinare la sua funzione booleana
2. determinare la sua tabella della verità

funzione booleana

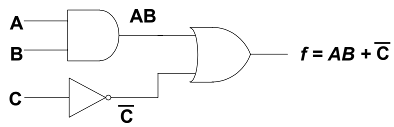
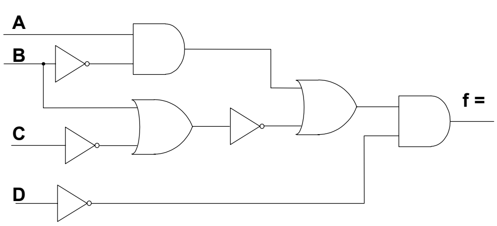


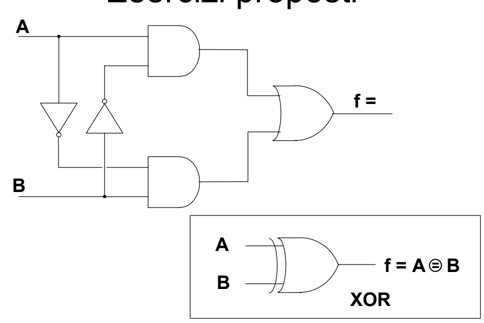
tabella della verità

A	B	C	AB	$\overline{C}$	AB + $\overline{C}$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

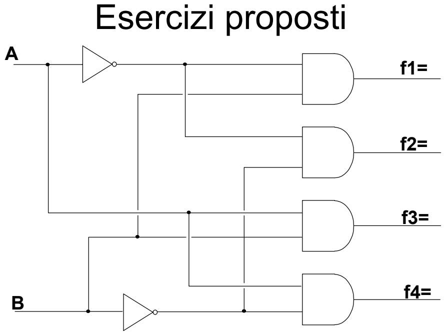
Esercizi proposti



Esercizi proposti



Esercizi proposti



Esercizi tipo 2: dalla funzione alla rete comb.

Dato la seguente funzione booleana:

$$f = AB(AC + BC) + A\overline{B}\overline{C} + AB$$

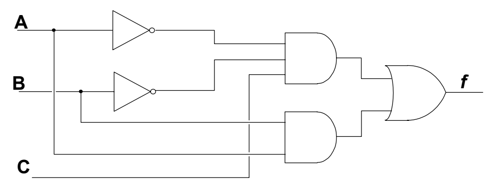
1. determinare la sua tabella della verità
2. minimizzare la funzione
3. proporne una realizzazione circuitale

SOLUZIONE n° 1

A B C	AC	BC	AC+BC	AB	AB(AC+BC)	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}C$	*f*
0 0 0	0	0	0	0	0	1	0	0
0 0 1	0	0	0	0	0	1	1	1
0 1 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1 1	0	1	1	0	0	0	0	0
1 0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
1 0 1	1	0	1	0	0	0	0	0
1 1 0	0	0	0	1	0	0	0	1
1 1 1	1	1	1	1	1	0	0	1

SOLUZIONE n° 1

$f = \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$
$= \bar{A}\bar{B}C + AB(\bar{C}+C)$
$= \bar{A}\bar{B}C + AB$



SOLUZIONE n° 2

$f = AB(AC + BC) + \bar{A}\bar{B}C + AB$
$= ABC + ABC + \bar{A}\bar{B}C + AB$
$= ABC + \bar{A}\bar{B}C + AB$
$= AB(C + 1) + \bar{A}\bar{B}C$
$= AB + \bar{A}\bar{B}C$

Esercizi proposti

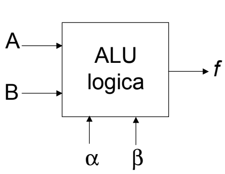
$f = B\bar{C}(A + C) + \bar{A}B\bar{C} + 1$

$f = AC + A\bar{B}C + B\bar{C} + AB\bar{C}$

$f = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}C + \bar{A}C + \bar{B}\bar{C} + A\bar{B}CB$

Esercizi tipo 3: dal problema alla rete comb.

Progettare una rete combinatoria che realizzi un'ALU ad 1 bit capace di eseguire le operazioni logiche bit a bit di AND, OR, NOT, XOR.



$f = AB$	se $\alpha=0$ $\beta=0$
$f = A+B$	se $\alpha=0$ $\beta=1$
$f = \bar{A}$	se $\alpha=1$ $\beta=0$
$f = A \oplus B$	se $\alpha=1$ $\beta=1$

SOLUZIONE : creazione della tabella

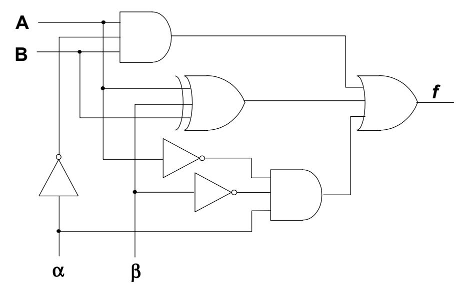
α	β	A	B	*f*
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

α	β	A	B	*f*
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

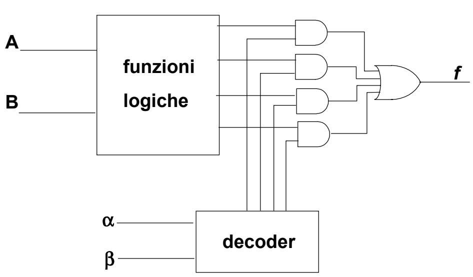
SOLUZIONE : individuazione delle funzioni

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{\alpha}\bar{\beta}AB + \bar{\alpha}\beta\bar{A}B + \bar{\alpha}\beta A\bar{B} + \bar{\alpha}\beta AB + \\
&\quad + \alpha\bar{\beta}\bar{A}\bar{B} + \alpha\bar{\beta}\bar{A}B + \alpha\beta\bar{A}B + \alpha\beta A\bar{B} = \\
&= (\bar{\alpha}\bar{\beta}AB + \bar{\alpha}\beta AB) + (\bar{\alpha}\beta\bar{A}B + \alpha\beta\bar{A}B) + \\
&\quad + (\bar{\alpha}\beta A\bar{B} + \alpha\beta A\bar{B}) + (\alpha\bar{\beta}\bar{A}\bar{B} + \alpha\bar{\beta}\bar{A}B) = \\
&= \bar{\alpha}AB + \beta\bar{A}B + \beta A\bar{B} + \alpha\bar{\beta}\bar{A} = \\
&= \bar{\alpha}AB + \beta(A \oplus B) + \alpha\bar{\beta}\bar{A}
\end{aligned}
$$

SOLUZIONE : schema della rete combinatoria



SOLUZIONE funzionale a moduli



Esercizi proposti

Progettare una rete combinatoria che realizzi un’ALU ad 1 bit capace di eseguire le operazioni aritmetiche di somma, sottrazione, moltiplicazione per 2 e divisione per 2, utilizzando i bit di carry-in e carry-out.