

Algebra di Boole

Un insieme I di elementi a, b, c, \dots e due operazioni α e β formano un'algebra di Boole $\mathcal{AB} = (I, \alpha, \beta)$ se

- le due operazioni sono binarie chiuse e godono della proprietà commutativa ed associativa
- ciascuna operazione gode della proprietà distributiva rispetto all'altra
- esiste per ogni operazione l'elemento neutro
- dato un qualsiasi elemento di I , esiste il suo complemento, che appartiene ancora ad I

Esercizi

Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti

Pagina 1

Algebra di Boole

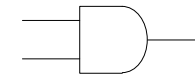
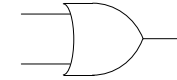
$\mathcal{AB} = (\{0, 1\}, \text{somma } [+], \text{prodotto } [\bullet])$

somma: $0 + 0 = 0$ prodotto: $0 \bullet 0 = 0$

$0 + 1 = 1$ $0 \bullet 1 = 0$

$1 + 0 = 1$ $1 \bullet 0 = 0$

$1 + 1 = 1$ $1 \bullet 1 = 1$



Esercizi

Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti

Pagina 2

Algebra di Boole

commutativa: $a + b = b + a$

$a \bullet b = b \bullet a$

associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$

$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

distributiva: $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$

$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

Esercizi

Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti

Pagina 3

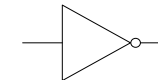
Algebra di Boole

elemento neutro: $a + 0 = a$

$a \bullet 1 = a$

complemento: $a + \bar{a} = 1$

$a \bullet \bar{a} = 0$



Esercizi

Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti

Pagina 4

Algebra di Boole

Teoremi 0 e 1: $a + 1 = 1$
 $a \cdot 0 = 0$

Idempotenza: $a + a = a$
 $a \cdot a = a$

Teo. Assorbimento: $a + a \cdot b = a$
 $a \cdot (a + b) = a$

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 5

Algebra di Boole

Teo. Consenso: $(a+b) \cdot (\bar{a}+c) \cdot (b+c) = (a+b) \cdot (\bar{a}+c)$
 $a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c$

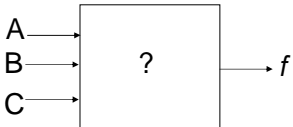
Involuzione: $\overline{\bar{a}} = a$

Teo. De Morgan: $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$
 $\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} + \bar{b}$

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 6

Esercizio: dal problema alla rete comb.

Progettare una rete combinatoria a tre ingressi che restituisca in output 1 solo se **ALMENO** due ingressi sono a 1



Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 7

SOLUZIONE : creazione della tabella

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Espressione booleana
 $f = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 8

SOLUZIONE : riduzione della espressione

$$\begin{aligned}
 f &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC \\
 &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB(\bar{C} + C) && \text{distributiva} \\
 &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB(1) && \text{complemento} \\
 &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB && \text{identità} \\
 &= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB + ABC && \text{idempotenza} \\
 &= \bar{A}BC + AC(\bar{B} + B) + AB && \text{distributiva} \\
 &= \bar{A}BC + AC(1) + AB && \text{complemento} \\
 &= \bar{A}BC + AC + AB && \text{identità} \\
 &= \bar{A}BC + AC + AB + ABC = \dots && \text{idempotenza} \\
 &= BC + AC + AB = (B + A)C + AB
 \end{aligned}$$

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 9

SOLUZIONE : schema della rete combinatoria

$$f = (B + A)C + AB$$

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 10

**Esercizio tipo:
dal problema alla rete comb.**

Progettare una rete combinatoria che realizzi un'ALU ad 1 bit capace di eseguire le operazioni logiche bit a bit di AND, OR, NOT, XOR.

$$\begin{aligned}
 f &= AB && \text{se } \alpha=0 \beta=0 \\
 f &= A+B && \text{se } \alpha=0 \beta=1 \\
 f &= \bar{A} && \text{se } \alpha=1 \beta=0 \\
 f &= A \text{ xor } B && \text{se } \alpha=1 \beta=1
 \end{aligned}$$

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 11

SOLUZIONE : creazione della tabella

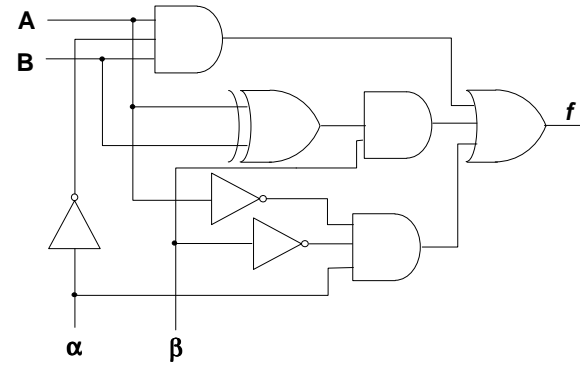
α	β	A	B	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 12

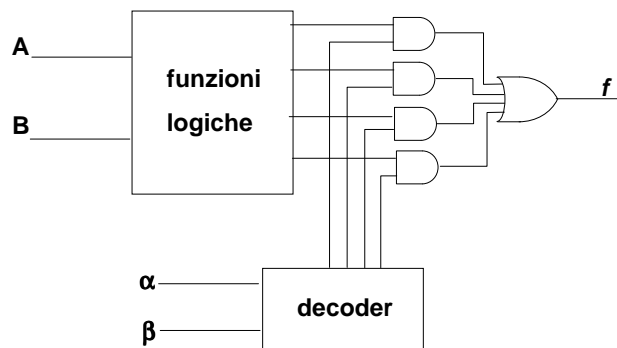
SOLUZIONE : individuazione delle funzioni

$$\begin{aligned}
 f &= \bar{\alpha}\bar{\beta}AB + \bar{\alpha}\beta\bar{A}B + \bar{\alpha}\beta A\bar{B} + \bar{\alpha}\beta AB + \\
 &+ \alpha\bar{\beta}\bar{A}\bar{B} + \alpha\bar{\beta}\bar{A}B + \alpha\beta\bar{A}\bar{B} + \alpha\beta\bar{A}B = \\
 &= (\bar{\alpha}\bar{\beta}AB + \bar{\alpha}\beta AB) + (\bar{\alpha}\beta\bar{A}B + \alpha\beta\bar{A}B) + \\
 &+ (\bar{\alpha}\beta A\bar{B} + \alpha\beta A\bar{B}) + (\alpha\beta\bar{A}\bar{B} + \alpha\beta\bar{A}B) = \\
 &= \bar{\alpha}AB + \beta\bar{A}B + \beta A\bar{B} + \alpha\beta\bar{A} = \\
 &= \bar{\alpha}AB + \beta(A \text{ xor } B) + \alpha\beta\bar{A}
 \end{aligned}$$

SOLUZIONE : schema della rete combinatoria

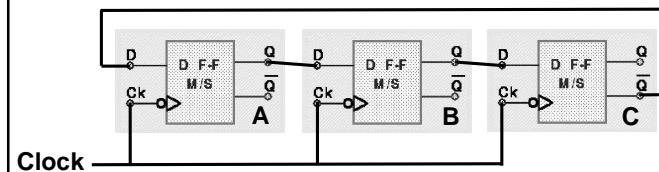


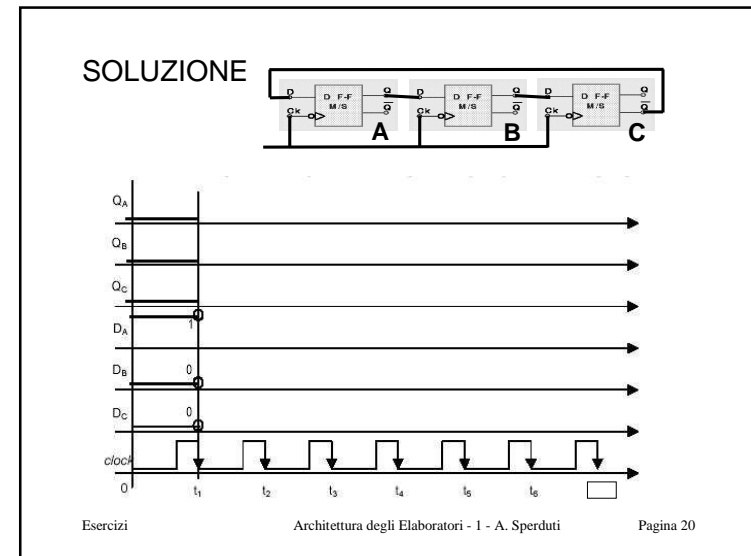
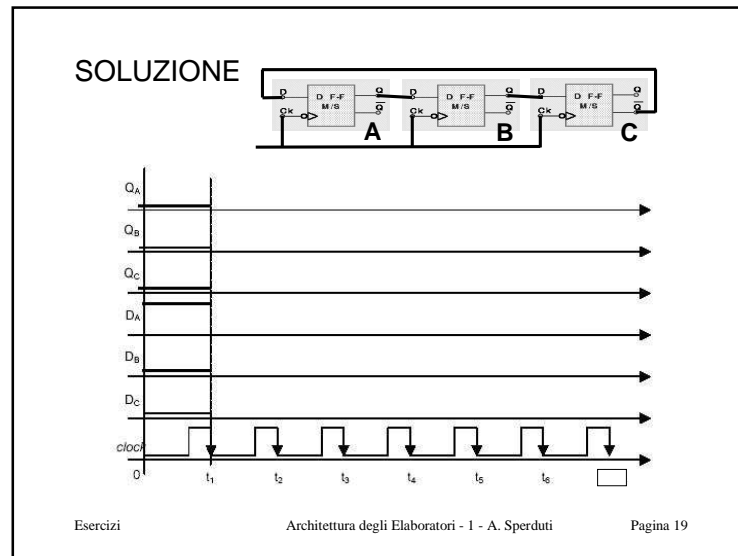
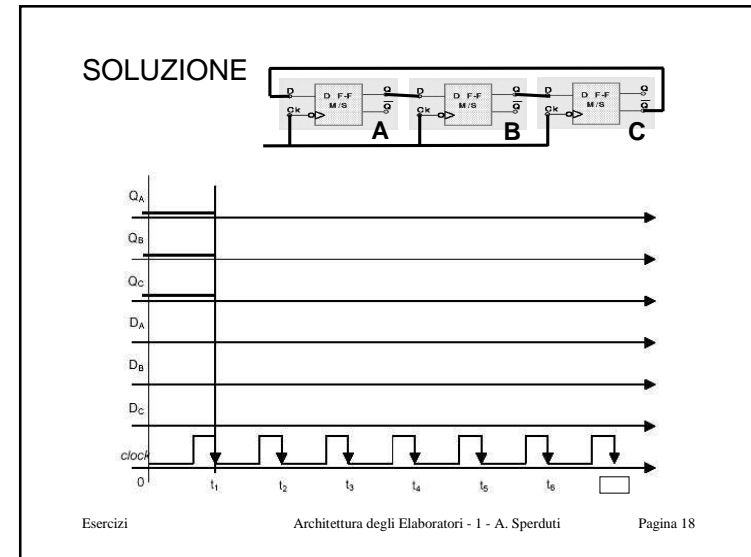
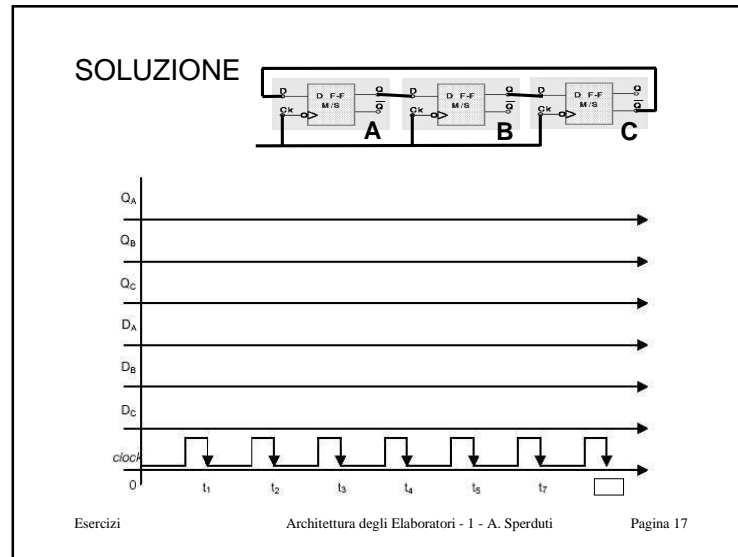
SOLUZIONE funzionale a moduli

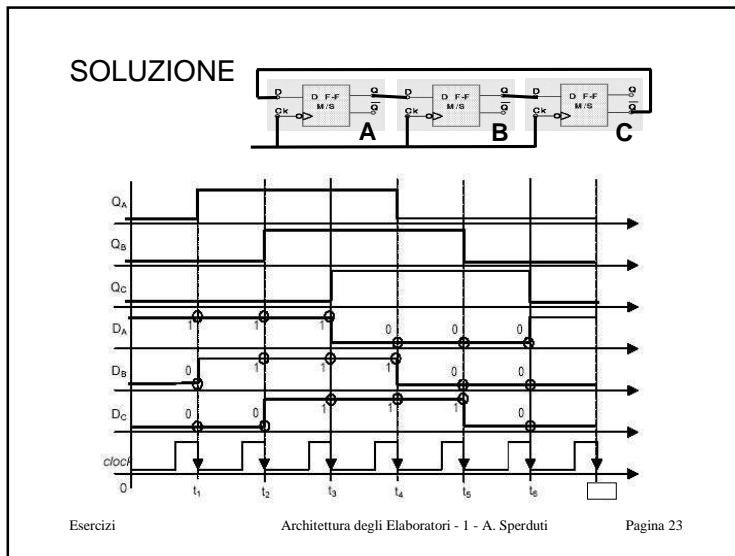
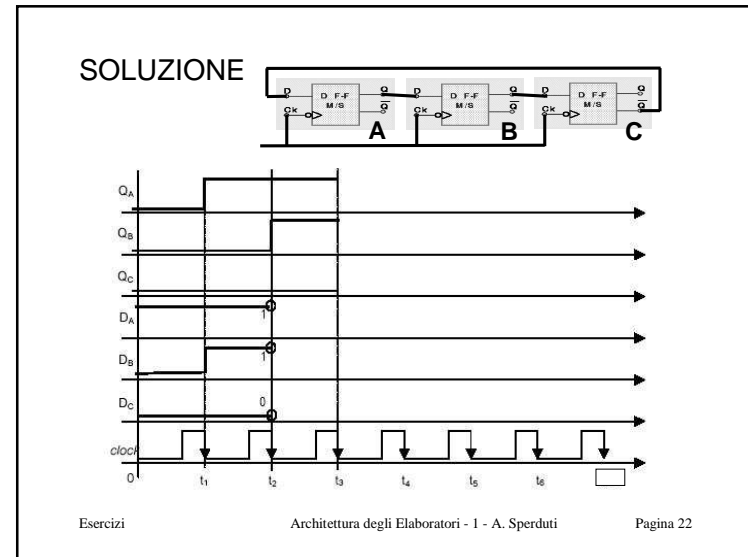
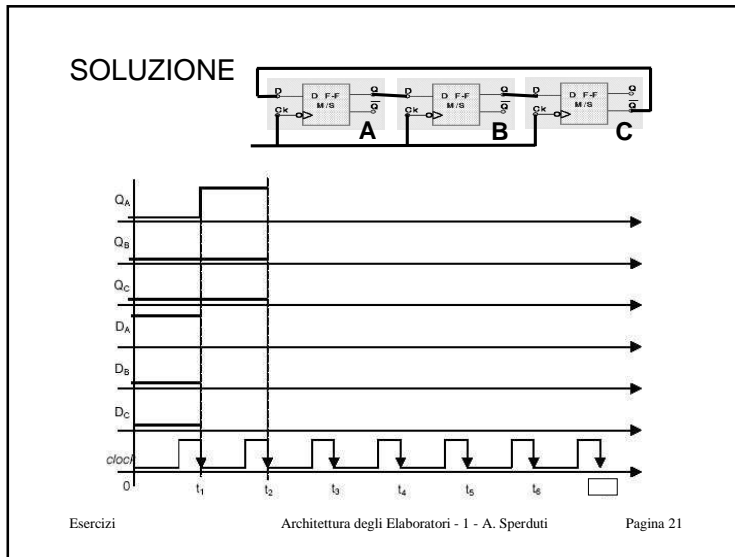


Esercizio reti sequenziali: Diagramma degli stati

Tracciare l'evoluzione temporale della seguente rete sequenziale sincrona, a partire dallo stato iniziale $Q_A = Q_B = Q_C = 0$.







Esercizio reti sequenziali: Sintesi

Sintetizzare una rete sequenziale che somma tre numeri binari positivi di n bit, per n qualsiasi, in n cicli di clock.

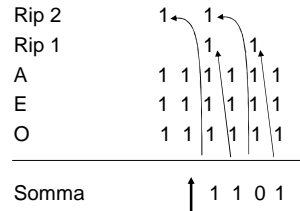
I numeri sono presentati contemporaneamente su tre ingressi A, E, O, come sequenze di bit, a partire dal bit meno significativo; ogni successivo gruppo di tre bit è applicato agli ingressi tra due impulsi di clock.

La somma è generata sull'uscita z, anch'essa in forma di sequenza a partire dal bit meno significativo.

Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 24

Soluzione

Si noti che nell'addizione di tre numeri si può generare ad ogni stadio un riporto a uno stadio successivo, o a due stadi successivi:



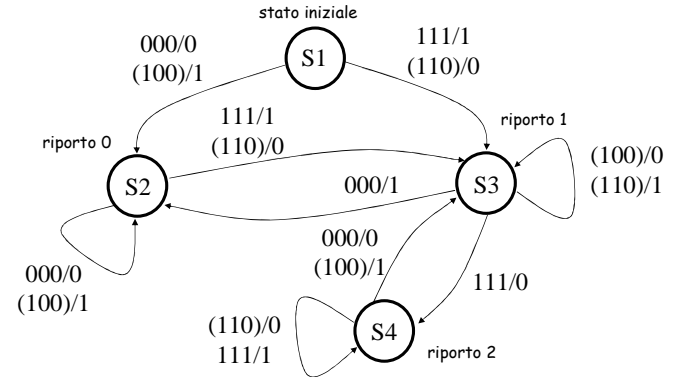
Qui si ripete la situazione incontrata al terzo stadio

Esercizi

Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti

Pagina 25

SOLUZIONE : diagramma degli stati



(100): tutte le configurazioni con un 1 (110): tutte le configurazioni con due 1

SOLUZIONE : tabella di verità (di flusso)

		stato successivo								
		AEO	000	001	011	010	100	101	111	110
u g										
S1	00	01	01	11	01	01	11	11	11	11
		0	1	0	1	1	0	1	1	0
S2	01	01	01	11	01	01	11	11	11	11
		0	1	0	1	1	0	1	1	0
S3	11	01	11	11	11	11	11	10	10	11
		1	0	1	0	0	1	0	0	1
S4	10	11	11	10	11	11	10	10	10	10
		0	1	0	1	1	0	1	1	0

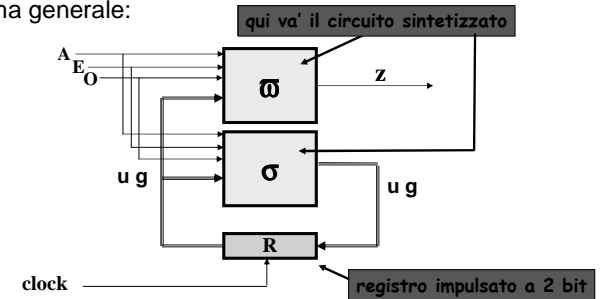
u g: bit usati per codificare gli stati

uscita

Soluzione

Data la tabella di flusso, si devono sintetizzare le reti combinatorie per la funzione di transizione di stato (σ) e la funzione di uscita (ω), **così come visto in precedenza.**

Schema generale:



Esercizi

Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti

Pagina 28

Inizio sintesi Σ ... (vedremo solo questa, come esempio)

	A E O							
	000	001	011	010	100	101	111	110
u g								
00	0	1	0	1	1	0	1	0
01	0	1	0	1	1	0	1	0
10	1	0	1	0	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0	1	0

$$z = \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O}$$

sintesi Σ ...

$$z = \bar{u}(\bar{g}+g)\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}(\bar{g}+g)\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}(\bar{g}+g)A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}(\bar{g}+g)AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O}$$

$$z = \bar{u}\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}O + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O}$$

$$z = (\bar{u}+u\bar{g})\bar{A}\bar{E}O + (\bar{u}+u\bar{g})\bar{A}E\bar{O} + (\bar{u}+u\bar{g})A\bar{E}\bar{O} + (\bar{u}+u\bar{g})AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O}$$

$$z = (\bar{u}\bar{g})\bar{A}\bar{E}O + (\bar{u}\bar{g})\bar{A}E\bar{O} + (\bar{u}\bar{g})A\bar{E}\bar{O} + (\bar{u}\bar{g})AE\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}\bar{A}E\bar{O} + \bar{u}\bar{g}A\bar{E}\bar{O} + \bar{u}\bar{g}AE\bar{O}$$

$$z = (\bar{u}\bar{g})(\bar{A}\bar{E}+AE)O + (\bar{u}\bar{g})(\bar{A}E+A\bar{E})\bar{O} + \bar{u}\bar{g}(\bar{A}\bar{E}+AE)\bar{O} + \bar{u}\bar{g}(\bar{A}E+A\bar{E})O$$

sintesi Σ ...

$$z = (\bar{u}\bar{g})(\bar{A}\bar{E}+AE)O + (\bar{u}\bar{g})(\bar{A}E+A\bar{E})\bar{O} + \bar{u}\bar{g}(\bar{A}\bar{E}+AE)\bar{O} + \bar{u}\bar{g}(\bar{A}E+A\bar{E})O$$

$$z = (\bar{A}\bar{E}+AE)((\bar{u}\bar{g})O+u\bar{g}\bar{O}) + (\bar{A}E+A\bar{E})((\bar{u}\bar{g})\bar{O}+u\bar{g}O)$$

$$z = (\bar{A} \text{ xor } \bar{E})((\bar{u}\bar{g}) \text{ xor } O) + (A \text{ xor } E)((\bar{u}\bar{g}) \text{ xor } \bar{O})$$

