Algebra di Boole

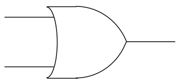
Un insieme **I** di elementi **a,b,c**,… e due operazioni α e β formano un'**algebra di Boole** $\mathscr{AB}$ =(**I**, α, β) se

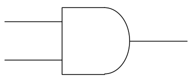
- le due operazioni sono binarie chiuse e godono della proprietà commutativa ed associativa
- ciascuna operazione gode della proprietà distributiva rispetto all'altra
- esiste per ogni operazione l'elemento neutro
- dato un qualsiasi elemento di **I**, esiste il suo complemento, che appartiene ancora ad **I**

Algebra di Boole

$\mathscr{AB}$ = ({ 0 , 1 }, somma [+], prodotto [•])

somma:		prodotto:	
	$0 + 0 = 0$		$0 \bullet 0 = 0$
	$0 + 1 = 1$		$0 \bullet 1 = 0$
	$1 + 0 = 1$		$1 \bullet 0 = 0$
	$1 + 1 = 1$		$1 \bullet 1 = 1$





Algebra di Boole

commutativa: $a + b = b + a$

$a \bullet b = b \bullet a$

associativa: $\boxed{a + (b + c) = (a + b) + c}$

$a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

distributiva: $a + (b \bullet c)= (a + b) \bullet (a + c)$

$a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$

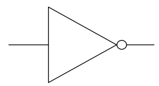
Algebra di Boole

elemento neutro: $a + 0 = a$

$a \bullet 1 = a$

complemento: $a + \overline{a} = 1$

$a \bullet \overline{a} = 0$



Algebra di Boole

Teoremi 0 e 1: $a + 1 = 1$

$a \bullet 0 = 0$

Idempotenza: $a + a = a$

$a \bullet a = a$

Teo. Assorbimento: $a + a \cdot b = a$

$a \bullet (a + b) = a$

Algebra di Boole

Teo. Consenso: $(a+b)\cdot(\bar{a}+c)\cdot(b+c) = (a+b)\cdot(\bar{a}+c)$

$a\cdot b + \bar{a}\cdot c + b\cdot c = a\cdot b + \bar{a}\cdot c$

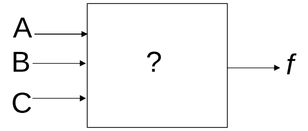
Involuzione: $\overline{\overline{a}} = a$

Teo. De Morgan: $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

$\overline{(a \bullet b)} = \bar{a} + \bar{b}$

Esercizio: dal problema alla rete comb.

Progettare una rete combinatoria a tre ingressi che restituisca in output 1 solo se ALMENO due ingressi sono a 1



SOLUZIONE : creazione della tabella

A	B	C	*f*
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Espressione booleana

$f = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

SOLUZIONE : riduzione della espressione

$f = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$

$= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB(\bar{C} + C)$ *distributiva*

$= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB(1)$ *complemento*

$= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB$ *identità*

$= \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB + ABC$ *idempotenza*

$= \bar{A}BC + AC(\bar{B} + B) + AB$ *distributiva*

$= \bar{A}BC + AC(1) + AB$ *complemento*

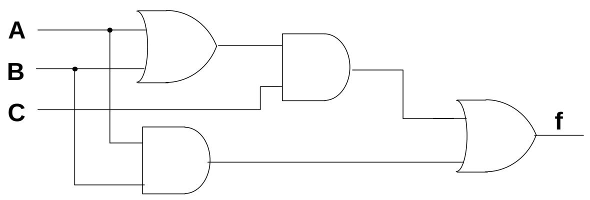
$= \bar{A}BC + AC + AB$ *identità*

$= \bar{A}BC + AC + AB + ABC = \ldots$ *idempotenza*

$= BC + AC + AB = (B + A)C + AB$

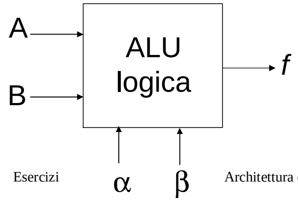
SOLUZIONE : schema della rete combinatoria

$f = (B + A)C + AB$



Esercizio tipo:
dal problema alla rete comb.

Progettare una rete combinatoria che realizzi un'ALU ad 1 bit capace di eseguire le operazioni logiche bit a bit di AND, OR, NOT, XOR.



$f = AB$ se $\alpha=0$ $\beta=0$

$f = A+B$ se $\alpha=0$ $\beta=1$

$f = \bar{A}$ se $\alpha=1$ $\beta=0$

$f = A \text{ xor } B$ se $\alpha=1$ $\beta=1$

SOLUZIONE : creazione della tabella

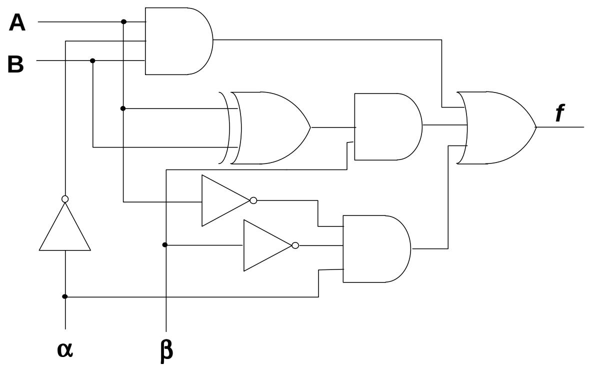
α	β	A	B	*f*
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1

α	β	A	B	*f*
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

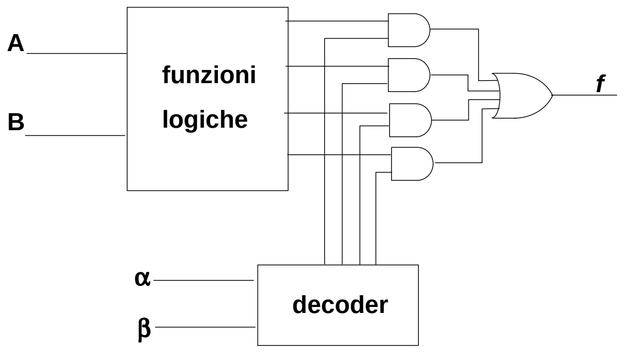
SOLUZIONE : individuazione delle funzioni

$$
\begin{aligned}
f &= \bar{\alpha}\bar{\beta}AB + \bar{\alpha}\beta\bar{A}B + \bar{\alpha}\beta A\bar{B} + \bar{\alpha}\beta AB + \\
&\quad + \alpha\bar{\beta}\bar{A}\bar{B} + \alpha\bar{\beta}\bar{A}B + \alpha\beta\bar{A}B + \alpha\beta A\bar{B} = \\
&= (\bar{\alpha}\bar{\beta}AB + \bar{\alpha}\beta AB) + (\bar{\alpha}\beta\bar{A}B + \alpha\beta\bar{A}B) + \\
&\quad + (\bar{\alpha}\beta A\bar{B} + \alpha\beta A\bar{B}) + (\alpha\bar{\beta}\bar{A}\bar{B} + \alpha\bar{\beta}\bar{A}B) = \\
&= \bar{\alpha}AB + \beta\bar{A}B + \beta A\bar{B} + \alpha\bar{\beta}\bar{A} = \\
&= \bar{\alpha}AB + \beta(A \text{ xor } B) + \alpha\bar{\beta}\bar{A}
\end{aligned}
$$

SOLUZIONE : schema della rete combinatoria

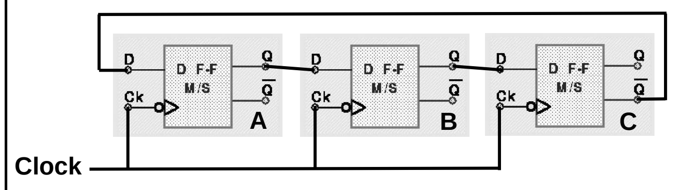


SOLUZIONE funzionale a moduli

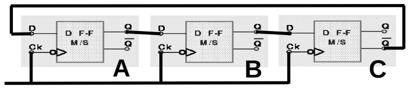


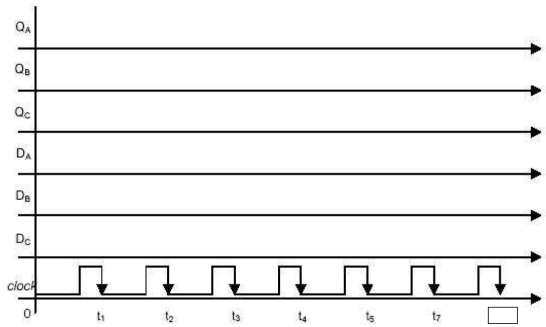
Esercizio reti sequenziali: Diagramma degli stati

Tracciare l'evoluzione temporale della seguente rete sequenziale sincrona, a partire dallo stato iniziale $Q_A = Q_B = Q_C = 0$.



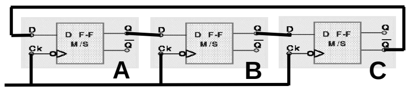
SOLUZIONE

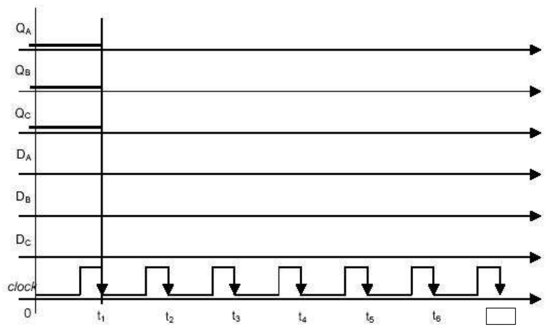




Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 17

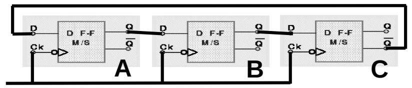
SOLUZIONE

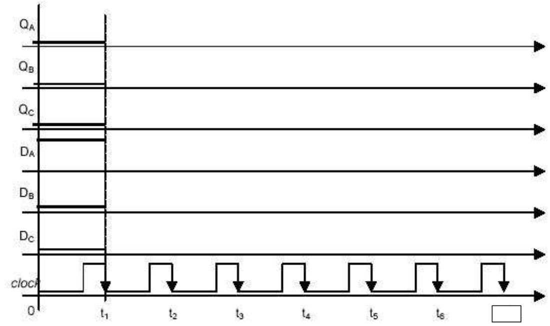




Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 18

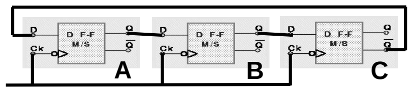
SOLUZIONE

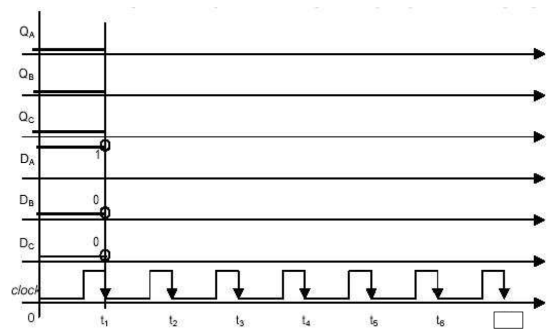




Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 19

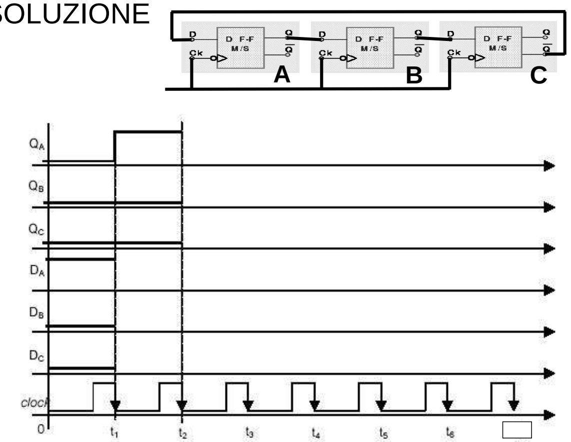
SOLUZIONE



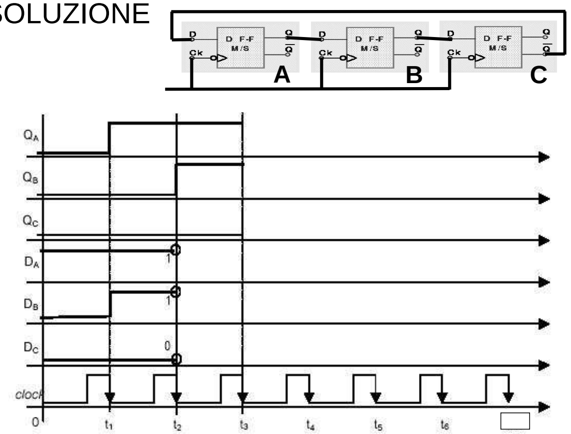


Esercizi Architettura degli Elaboratori - 1 - A. Sperduti Pagina 20

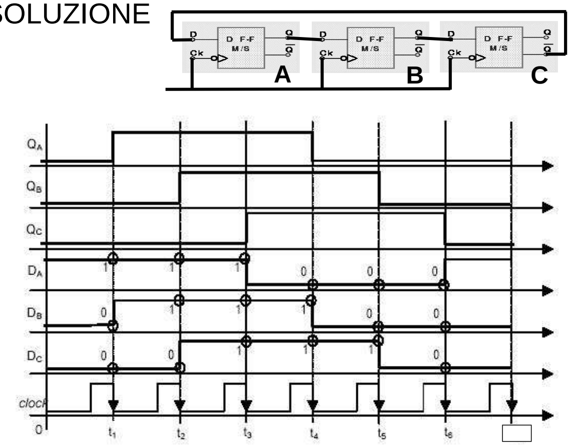
SOLUZIONE



SOLUZIONE



SOLUZIONE

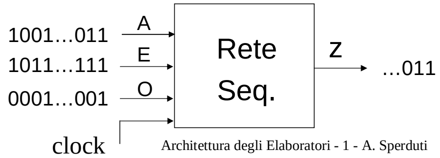


Esercizio reti sequenziali: Sintesi

Sintetizzare una rete sequenziale che somma tre numeri binari positivi di *n* bit, per *n* qualsiasi, in *n* cicli di clock.

I numeri sono presentati contemporaneamente su tre ingressi A, E, O, come sequenze di bit, a partire dal bit meno significativo; ogni successivo gruppo di tre bit è applicato agli ingressi tra due impulsi di clock.

La somma è generata sull'uscita z, anch'essa in forma di sequenza a partire dal bit meno significativo.



Soluzione

Si noti che nell'addizione di tre numeri si può generare ad ogni stadio un riporto a uno stadio successivo, o a due stadi successivi:

Rip 2	1 1
Rip 1	1 1
A	1 1 1 1 1 1
E	1 1 1 1 1 1
O	1 1 1 1 1 1
Somma	1 1 0 1

Qui si ripete la situazione incontrata al terzo stadio

SOLUZIONE : tabella di verità (di flusso)

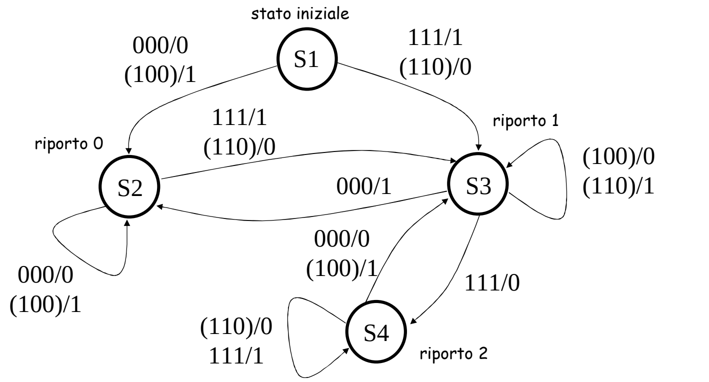
stato successivo

	u g \ A E O	000	001	011	010	100	101	111	110
S1	00	01 0	01 1	11 0	01 1	01 1	11 0	11 1	11 0
S2	01	01 0	01 1	11 0	01 1	01 1	11 0	11 1	11 0
S3	10	01 1	11 0	11 1	11 0	11 0	11 1	10 0	11 1
S4	11	11 0	11 1	10 0	11 1	11 1	10 0	10 1	10 0

u g: bit usati per codificare gli stati

uscita

SOLUZIONE : diagramma degli stati

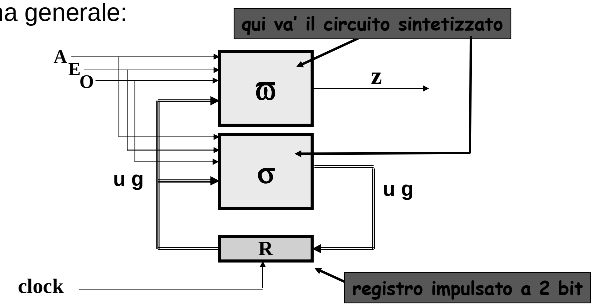


(100): tutte le configurazione con un 1 (110): tutte le configurazione con due 1

Soluzione

Data la tabella di flusso, si devono sintetizzare le reti combinatorie per la funzione di transizione di stato (σ) e la funzione di uscita (ϖ), **<u>così come visto in precedenza</u>**.

Schema generale:



Inizio sintesi ϖ ...

u g \ A E O	000	001	011	010	100	101	111	110
00	0	1	0	1	1	0	1	0
01	0	1	0	1	1	0	1	0
10	1	0	1	0	0	1	0	1
11	0	1	0	1	1	0	1	0

$$\begin{aligned} z = {} & \bar u\bar g\bar A\bar E O + \bar u\bar g\bar A E\bar O + \bar u\bar g A\bar E\bar O + \bar u\bar g AEO + \\ & \bar u g\bar A\bar E O + \bar u g\bar A E\bar O + \bar u g A\bar E\bar O + \bar u g AEO + \\ & u\bar g\bar A\bar E\bar O + u\bar g\bar A EO + u\bar g A\bar E O + u\bar g AE\bar O + \\ & ug\bar A\bar E O + ug\bar A E\bar O + ugA\bar E\bar O + ugAEO \end{aligned}$$

sintesi ϖ ...

$$\begin{aligned} z = {} & \bar u(\bar g+g)\bar A\bar E O + \bar u(\bar g+g)\bar A E\bar O + \bar u(\bar g+g)A\bar E\bar O + \bar u(\bar g+g)AEO + \\ & u\bar g\bar A\bar E\bar O + u\bar g\bar A EO + u\bar g A\bar E O + u\bar g AE\bar O + \\ & ug\bar A\bar E O + ug\bar A E\bar O + ugA\bar E\bar O + ugAEO \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = {} & \bar u\bar A\bar E O + \bar u\bar A E\bar O + \bar u A\bar E\bar O + \bar u AEO + \\ & u\bar g\bar A\bar E\bar O + u\bar g\bar A EO + u\bar g A\bar E O + u\bar g AE\bar O + \\ & ug\bar A\bar E O + ug\bar A E\bar O + ugA\bar E\bar O + ugAEO \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = {} & (\bar u+ug)\bar A\bar E O + (\bar u+ug)\bar A E\bar O + (\bar u+ug)A\bar E\bar O + (\bar u+ug)AEO + \\ & u\bar g\bar A\bar E\bar O + u\bar g\bar A EO + u\bar g A\bar E O + u\bar g AE\bar O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = {} & (\overline{u\bar g})\bar A\bar E O + (\overline{u\bar g})\bar A E\bar O + (\overline{u\bar g})A\bar E\bar O + (\overline{u\bar g})AEO + \\ & u\bar g\bar A\bar E\bar O + u\bar g\bar A EO + u\bar g A\bar E O + u\bar g AE\bar O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z = {} & (\overline{u\bar g})(\bar A\bar E+AE)O + (\overline{u\bar g})(\bar A E+A\bar E)\bar O + \\ & u\bar g(\bar A\bar E+AE)\bar O + u\bar g(\bar A E+A\bar E)O \end{aligned}$$

sintesi ϖ ...

$$\begin{aligned} z = {} & (\overline{u\bar g})(\bar A\bar E+AE)O + (\overline{u\bar g})(\bar A E+A\bar E)\bar O + \\ & u\bar g(\bar A\bar E+AE)\bar O + u\bar g(\bar A E+A\bar E)O \end{aligned}$$

$$z = (\bar A\bar E+AE)((\overline{u\bar g})O+u\bar g\bar O) + (\bar A E+A\bar E)((\overline{u\bar g})\bar O+u\bar g O)$$

$$z = (\overline{A \text{ xor } E})((u\bar g) \text{ xor } O) + (A \text{ xor } E)(\overline{(u\bar g) \text{ xor } O})$$