Problema 1

Siano A e B due linguaggi. Mostrare che:

- Se A e B sono in $\mathcal{NP}$, allora anche $A \cup B$ e $A \cap B$ sono in $\mathcal{NP}$.

  traccia di soluzione:

  - $A \cup B$: costruire una NTM che invia l'input x sia a NTM_A che a NTM_B, quindi accetta x se o NTM_A, o NTM_B (oppure entrambe) accettano x; notare che il tempo di esecuzione di NTM è polinomiale, quindi $A \cup B$ è in $\mathcal{NP}$.
  - $A \cap B$: come sopra, ma questa volta NTM accetta x se e solo se sia NTM_A che NTM_B accettano la stringa in input x.

- Se A e B sono $\mathcal{NP}$-completi, allora $A \cup B$ e $A \cap B$ non necessariamente sono $\mathcal{NP}$-completi.

  traccia di soluzione:

  - $A \cap B$: sia L un linguaggio $\mathcal{NP}$-completo. Anche i linguaggi $0L = \{0w | w \in L\}$ e $1L = \{1w | w \in L\}$ sono linguaggi $\mathcal{NP}$-completi. Se consideriamo $0L \cap 1L = \emptyset$ che banalmente non è $\mathcal{NP}$-completo.
  - $A \cup B$: sia L un linguaggio $\mathcal{NP}$-completo. Allora anche i linguaggi $A = \{1\{0,1\}^*\} \cup 0L$ e $B = \{0\{0,1\}^*\} \cup 1L$ sono $\mathcal{NP}$-completi. Però $A \cup B = \{0,1\}^*$ che banalmente non è $\mathcal{NP}$-completo.

Problema 2

Definire una TM (tramite la tabella o diagramma di transizione di stato) che data una stringa binaria sul nastro, B su tutte le altre posizioni del nastro e testina posizionata sul primo simbolo binario a sinistra, termina con una stringa dove gli 0 sono posti prima degli 1 (con lo stesso numero di 0 e 1 della stringa in input), B su tutte le altre posizioni del nastro e testina posizionata sul primo simbolo binario. Ad esempio, data la configurazione

				⇓										
$\cdots$	B	B	B	1	1	0	1	0	0	1	B	B	B	$\cdots$

La TM termina con la seguente configurazione

				⇓										
$\cdots$	B	B	B	0	0	0	1	1	1	1	B	B	B	$\cdots$

Soluzione:

Di seguito si mostra la tabella di transizione di stato per una TM che si comporta come richiesto:

	0	1	X	B
$\rightarrow q_0$	$(q_0, 0, R)$	(q_1, X, R)		(q_4, B, L)
q_1	$(q_2, 1, L)$	$(q_1, 1, R)$		(q_3, B, L)
q_2		$(q_2, 1, L)$	$(q_0, 0, R)$	
q_3		$(q_3, 1, L)$	$(q_5, 1, L)$	
q_4	$(q_4, 0, L)$			(q_5, B, R)
$*q_5$				